# Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$10

**Exercice 0**

1. Soit $X$ un espace topologique. On suppose qu'il existe $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sous-ensembles de $X$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\forall n, K_n$ est compact

(2) $\forall n, K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$

(3) $X = \bigcup\limits_n K_n$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $F, G \subset X$ deux fermés disjoints. Montrer qu'il existe $F', G'$ deux fermés disjoints de $X$ tels que :

$$F \subset F' \text{ et } G \subset G' \qquad\qquad F \cap K_n \subset \mathring{F}' \text{ et } G \cap K_n \subset \mathring{G}'$$

b) Montrer que $X$ est normal.

2. [Plus difficile] Montrer que, même si on suppose $X$ séparé, le résultat précédent est faux lorsqu'on remplace la propriété (2) par (2') : $\forall n, K_n \subset K_{n+1}$.

**Exercice 1 : spectre des opérateurs autoadjoints**

Soit $H$ un espace de Hilbert. Soit $u : H \to H$ un opérateur linéaire continu et autoadjoint.

1. Dans cette question, on montre que $|||u|||$ ou $-|||u|||$ appartient au spectre de $u$.

a) Montrer que, pour tous $x, y \in H$ :

$$4\langle u(x), y\rangle = \langle u(x+y), x+y\rangle - \langle u(x-y), x-y\rangle$$

et en déduire que $|||u||| = \sup\limits_{||x||\leq 1} |\langle u(x), x\rangle|$.

b) Quitte à considérer $-u$ à la place de $u$, on peut supposer que $|||u||| = \sup\limits_{||x||\leq 1} \langle u(x), x\rangle$. Posons $v = |||u||| - u$.

Montrer que, pour tous $x, y \in H$, $|\langle v(x), y\rangle|^2 \leq \langle v(x), x\rangle\langle v(y), y\rangle$.

c) En déduire que, pour tout $x \in H$, $||v(x)||^2 \leq |||v|||\langle v(x), x\rangle$.

d) Conclure.

2. On suppose maintenant qu'en plus d'être autoadjoint, $u$ est compact. Montrer que :

$$H = \overline{E_0 \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\bigoplus_n} E_{\lambda_n}\right)}$$

où la suite dénombrable (finie ou infinie) $(\lambda_n)_n$ décrit l'ensemble des valeurs propres non-nulles de $u$ et n'a pas d'autre valeur d'adhérence que 0.

[Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $E_x$ l'ensemble des vecteurs propres de $u$ pour la valeur propre $x$.]

**Exercice 2 : spectre des opérateurs continus sur un espace de Banach**
Soit $E$ un espace de Banach sur $\mathbb{C}$. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$ une fonction linéaire continue de $E$ dans $E$. On rappelle que le *spectre* de $u$ est l'ensemble :

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tq } u - \lambda \mathrm{Id} \text{ n'est pas un homéomorphisme}\}$$

Nous allons montrer que le spectre de $u$ n'est pas vide. Par l'absurde, on suppose qu'il est vide.
1. Soit $\phi : \mathcal{L}_c(E) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue quelconque. On définit :

$$\begin{array}{rcl} \zeta : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \to & \phi((u - z\mathrm{Id})^{-1}) \end{array}$$

a) Montrer que $\zeta(z) \to 0$ lorsque $|z| \to +\infty$.
b) Montrer que $\zeta$ est développable en série entière en tout point de $\mathbb{C}$.

2. On admet le lemme suivant.
**Lemme.** *Soit $W : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si $W$ est développable en série entière au voisinage de tout point et si $W(z) \to 0$ lorsque $|z| \to +\infty$, alors $W$ est la fonction nulle.*
Obtenir une contradiction.

3. [Démonstration du lemme ; sans rapport avec le cours de topologie]
Soit $W : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ développable en série entière en tout point de $\mathbb{C}$ telle que $|W(z)| \to 0$ lorsque $|z| \to +\infty$.
a) Montrer que $|W|$ atteint son maximum sur $\mathbb{C}$. On note $m_0$ ce maximum.
b) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que si $|W(z_0)| = m_0$, alors $W$ est constante au voisinage de $z_0$.
[Indication : Montrer que tous les coefficients du développement en série entière de $W$ en $z_0$ sont nuls, à part le premier]
c) Conclure.

**Exercice 3 : opérateur de Volterra**
On considère l'opérateur suivant :

$$\begin{array}{rcl} H : L^2([0;1]) & \to & L^2([0;1]) \\ f & \to & (x \to \int_0^x f(t)dt) \end{array}$$

1. Montrer que $H$ est bien défini et qu'il s'agit d'un opérateur compact.
2. Montrer que $H$ n'admet aucune valeur propre.
3. Montrer que $\mathrm{Sp}(H) = \{0\}$ mais que $H$ n'est pas nilpotente.

**Exercice 4**
Soient $E$ un espace de Banach et $H$ un espace de Hilbert.
1. Montrer que si $S : E \to H$ est un opérateur compact, alors il existe $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs linéaires continus de $E$ dans $H$, de rang fini, telle que $S_n \to S$ lorsque $n \to +\infty$ (au sens de la norme opérateur).
2. Quel est le rapport avec la photo de droite ?

**Exercice 5 : un théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints non compacts**

1. Dans cette question, on suppose que $H$ est un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et que $A : H \to H$ est un opérateur linéaire, continu et autoadjoint (c'est-à-dire que $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle$ pour tous $x, y \in H$).

a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $x \in H$ :

$$||(A - z\mathrm{Id})(x)|| \geq |\mathrm{Im}\, z|.||x||$$

b) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}\, z \neq 0$, $\mathrm{Im}\,(A - z\mathrm{Id})$ est dense dans $H$.

c) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}\, z \neq 0$, $A - z\mathrm{Id}$ est inversible. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$.

Soit maintenant $H$ un espace de Hilbert séparable, sur $\mathbb{R}$. Soit $A : H \to H$ un opérateur linéaire, continu et autoadjoint.

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit $P(A)$ de la manière suivante : si $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$, on pose $P(A) = a_0\mathrm{Id} + a_1 A + ... + a_n A^n$.

2. a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\mathrm{Sp}(P(A)) = P(\mathrm{Sp}(A))$.

[Indication : Commencer par montrer le résultat sur un espace de Hilbert complexe.]

b) Montrer que $|||P(A)||| = \sup_{x \in \mathrm{Sp}(A)} |P(x)|$.

[Indication : Utiliser la question 1 de l'exercice 1.]

c) Montrer qu'il existe une unique application continue $\phi_A : (\mathcal{C}(\mathrm{Sp}(A), \mathbb{R}), ||.||_\infty) \to \mathcal{L}_c(H)$ telle que $\phi_A(P) = P(A)$ si $P$ est un polynôme.

Dans la suite, on notera simplement $\phi_A(f) = f(A)$.

d) Montrer que, pour toutes fonctions $f, g$, $(fg)(A) = f(A)g(A)$.

e) Montrer que, pour toute fonction $f$, $f(A)$ est autoadjoint.

3. Dans cette question, on suppose qu'il existe $\xi \in H$ tel que $\mathrm{Vect}\,\{A^n \xi\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $H$.

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et à support compact, on pose $\mu(f) = \langle f(A)\xi, \xi\rangle$, où $f(A)$ est un abus de langage pour $f_{|\mathrm{Sp}(A)}(A)$.

a) Montrer que si $f \geq 0$, alors $\mu(f) \geq 0$.

Un théorème de Riesz dit qu'alors il existe une unique mesure de Radon $\mu$ telle que, pour toute $f$, $\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x)$.

b) Montrer que $\mu$ est à support compact (inclus dans $\mathrm{Sp}(A)$).

c) Montrer qu'il existe un unique opérateur unitaire $G : L^2(\mathbb{R}, \mu) \to H$ tel que, pour toute $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à support compact, $G(f) = f(A)\xi$. Montrer que $G$ est un isomorphisme.

d) Montrer que $G^{-1} \circ A \circ G(f) = (x \to xf(x))$ pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$.

4. Montrer qu'il existe $H_1, H_2, ...$ des sous-espaces vectoriels fermés de $H$ (en nombre fini ou dénombrable infini) tels que :

- $H = \overline{\overset{\perp}{\bigoplus_n} H_n}$
- $\forall n, \exists \xi_n \in H_n$ tq $H_n = \overline{\mathrm{Vect}\,\{A^k \xi_n, k \in \mathbb{N}\}}$

5. Montrer qu'il existe $\mu_1, \mu_2, ...$ un ensemble dénombrable (fini ou infini) de mesures réelles à support compact inclus dans $\mathrm{Sp}(A)$ et un isomorphisme d'espaces de Hilbert $G : L^2(\mathbb{R}, \mu_1) \oplus L^2(\mathbb{R}, \mu_2) \oplus ... \to H$ tels que, si on pose :

$$
\begin{array}{rccl}
M: & L^2(\mathbb{R},\mu_1)\oplus L^2(\mathbb{R},\mu_2)\oplus ... & \to & L^2(\mathbb{R},\mu_1)\oplus L^2(\mathbb{R},\mu_2)\oplus ... \\
 & (f_1, f_2, ..) & \to & (x\to xf_1(x), x\to xf_2(x), ...)
\end{array}
$$

alors on ait $G^{-1}\circ A\circ G = M$.
[Lorsque $H_1, H_2, ...$ sont des espaces de Hilbert, on désigne par $H_1 \oplus H_2 \oplus ...$ le complété de l'ensemble $H_\infty$ suivant :

$$H_\infty = \{(h_n)\in H_1\times H_2\times ... \text{ tq } \sum_n ||h_n||^2 < +\infty\}$$

Ce complété est un espace de Hilbert.
La définition de $M$ doit être étendue par continuité au complété.]