Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$10

Corrigé

Exercice 0

1. a) L'ensemble K_{n+1} est normal (car compact). Puisque $F \cap K_{n+1}$ est un fermé de K_{n+1}, inclus dans $K_{n+1} - (G \cap K_{n+1})$, qui est un ouvert de K_{n+1}, il existe U ouvert de K_{n+1} tel que :

$$F \cap K_{n+1} \subset U \subset \overline{U} \subset K_{n+1} - (G \cap K_{n+1})$$

Pour la même raison, il existe V un ouvert de K_{n+1} tel que :

$$G \cap K_{n+1} \subset V \subset \overline{V} \subset K_{n+1} - \overline{U}$$

Posons $F' = F \cup \overline{U}$ et $G' = G \cup \overline{V}$. Ces deux ensembles sont fermés. Ils sont disjoints. En effet, comme $\overline{U}, \overline{V} \subset K_{n+1}$:
- $F \cap G = \emptyset$ par hypothèse.
- $\overline{U} \cap G \subset \overline{U} \cap (G \cap K_{n+1}) = \emptyset$
- $F \cap \overline{V} \subset (F \cap K_{n+1}) \cap \overline{V} \subset \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$
- $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$

Par construction, $F \subset F'$ et $G \subset G'$. De plus, $F \cap K_n \subset U \cap K_n \subset U \cap \mathring{K}_{n+1}$. Puisque $U \cap \mathring{K}_{n+1}$ est un ouvert de $\mathring{K}_{n+1}$, qui est ouvert, c'est aussi un ouvert de X. Comme il est inclus dans F', il est inclus dans $\mathring{F}'$. Donc $F \cap K_n \subset \mathring{F}'$.
De même, $G \cap K_n \subset \mathring{G}'$.
b) Soient F, G deux fermés disjoints. D'après la question précédente, on peut construire par récurrence des suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $F_0 = F, G_0 = G$ et, pour tout n :
- $F_n \cap G_n = \emptyset$
- $F_n \subset F_{n+1}, G_n \subset G_{n+1}$
- $F_n \cap K_n \subset \mathring{F}_{n+1}, G_n \cap K_n \subset \mathring{G}_{n+1}$

On pose $U = \bigcup_n \mathring{F}_n$ et $V = \bigcup_n \mathring{G}_n$. Ce sont des ouverts de X

Pour tout n, $F \cap K_n \subset F_n \cap K_n \subset \mathring{F}_{n+1} \subset U$. De même, $G \cap K_n \subset V$. D'après la propriété (3), cela implique que $F \subset U$ et $G \subset V$.
De plus, U et V sont disjoints. En effet, si $x \in U \cap V$, il existe n, m tels que $x \in F_n$ et $x \in G_m$. Mais alors $x \in F_{\max(n,m)} \cap G_{\max(n,m)} = \emptyset$.
On a donc trouvé deux ouverts disjoints de X dont l'un contient U et l'autre V.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers 0 sans prendre la valeur 0. On considère la topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{R}$ dont les ouverts sont de la forme $U = V - B$ où V est un ouvert de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle et $B \subset \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $[-N; -\frac{1}{N}] \cup \{0\} \cup [\frac{1}{N}; N]$ est compact pour $\mathcal{T}$ car la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur cet ensemble est la topologie usuelle. L'ensemble $\mathbb{R}$ peut donc s'écrire comme une union de compacts emboîtés.
De plus, $\mathbb{R}$ est séparé car la topologie $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie usuelle, qui est séparée.
Néanmoins, $\mathbb{R}$ n'est pas normal pour $\mathcal{T}$. En effet, si on pose $A = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, A est fermé (car son complémentaire est ouvert). Le singleton $\{0\}$ est aussi fermé.
Montrons que A et $\{0\}$ n'admettent pas de voisinage ouverts disjoints. Un voisinage V de $\{0\}$ doit contenir un ensemble de la forme $]-\epsilon; \epsilon[-A$ pour un $\epsilon > 0$. Pour tout n tel que $|u_n| < \epsilon$, tout voisinage de u_n rencontre $]-\epsilon; \epsilon[-A$ et, en particulier, ne peut pas être disjoint de V.

Exercice 1
1. a)

$$\begin{aligned}\langle u(x+y), x+y\rangle - \langle u(x-y), x-y\rangle &= (\langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), u\rangle) \\ &\quad - (\langle u(x), x\rangle - \langle u(x), y\rangle - \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), u\rangle) \\ &= 2(\langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle) \\ &= 4\langle u(x), y\rangle\end{aligned}$$

Posons $\alpha = \sup\limits_{||x||\leq 1} |\langle u(x), x\rangle|$.
Pour tout x, $|\langle u(x), x\rangle| \leq |||u|||.||x||^2$ donc $\alpha \leq |||u|||$. Montrons l'inégalité réciproque.
Pour tous x, y, d'après l'égalité qu'on vient de démontrer :

$$\begin{aligned}4|\langle u(x), y\rangle| &\leq \left(||x+y||^2 + ||x-y||^2\right)\alpha \\ &= 2\alpha(||x||^2 + ||y||^2)\end{aligned}$$

Donc, pour tous x, y tels que $||x||, ||y|| \leq 1$, $|\langle u(x), y\rangle| \leq \alpha$.
En prenant $y = \frac{u(x)}{||u(x)||}$ (si $u(x) \neq 0$), on obtient que, pour tout x tel que $||x|| \leq 1$, $||u(x)|| \leq \alpha$.
Cela implique que $|||u||| \leq \alpha$.
b) L'application bilinéaire $(x, y) \to \langle v(x), y\rangle$ est presque un produit scalaire. En effet, elle est symétrique et, de plus, pour tout $x \in H$:

$$\langle v(x), x\rangle = |||u|||.||x||^2 - \langle u(x), x\rangle \geq (|||u||| - \alpha)||x||^2 = 0$$

Elle ne vérifie en revanche pas nécessairement la séparation mais la séparation n'est pas nécessaire pour que Cauchy-Schwarz soit vraie :

$$\forall x, y \in H \qquad |\langle v(x), y\rangle|^2 \leq \langle v(x), x\rangle\langle v(y), y\rangle$$

c) Pour tous x, y tels que $||y|| = 1$, $|\langle v(x), y\rangle|^2 \leq \langle v(x), x\rangle|||v|||.||y||^2 = |||v|||\langle v(x), x\rangle$.
Si $v(x) = 0$, l'inégalité demandée est évidente. Sinon, on pose $y = \frac{v(x)}{||v(x)||}$ et on obtient, grâce à la dernière inégalité :

$$||v(x)||^2 \leq |||v|||\langle v(x), x\rangle$$

d) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H tels que $\langle u(x_n), x_n\rangle \to |||u|||$ et $||x_n|| = 1$. Alors $\langle v(x_n), x_n\rangle = |||u|||.||x_n||^2 - \langle u(x_n), x_n\rangle \to 0$.

D'après la question précédente, cela implique que $||v(x_n)|| \to 0$. L'application v n'est donc pas inversible (on rappelle que si une application linéaire continue f entre deux espaces de Banach est inversible et d'inverse continu, alors il existe $c > 0$ tel que, pour tout x, $||f(x)|| \geq c||x||$). D'après la définition de v, cela veut dire que $|||u||| \in \mathrm{Sp}(u)$.

2. Soit $(\lambda_n)_n$ la suite (finie ou infinie) des valeurs propres non-nulles de u. Puisque u est compact, on sait que cette suite ne peut avoir que 0 pour valeur d'adhérence.
On sait aussi que les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux les uns aux autres. On peut donc bien poser $H_0 = \overline{E_0 \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\bigoplus_n} E_{\lambda_n}\right)}$. Il faut montrer que $H_0 = H$.
Puisque H_0 est fermé, il suffit de montrer que son orthogonal est réduit à $\{0\}$.
Notons $G = H_0^\perp$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $G \neq \{0\}$.
C'est un espace stable par u (car H_0 est stable par u et u est autoadjoint) et $u_{|G}$ est toujours un opérateur autoadjoint et compact. Si $G \neq \{0\}$, $u_{|G}$ n'est pas l'application nulle, sinon $G \subset E_0$. D'après la première partie de l'exercice, il existe donc $\lambda \neq 0$ tel que le spectre de $u_{|G}$ contient λ. Alors $\lambda \mathrm{Id} - u_{|G}$ n'est pas inversible. Puisque c'est un opérateur de Fredholm d'indice nul, cela implique qu'il a un noyau non-trivial (sinon, il est injectif et d'image G tout entier donc, par le théorème de l'isomorphisme, il est continument inversible). Donc λ est valeur propre de $u_{|G}$ et il existe un vecteur propre de u qui appartient à G. C'est en contradiction avec la définition de G, qui est orthogonal à tous les vecteurs propres de u.

Exercice 2

1. a) Il suffit de montrer que $|||(u - z\mathrm{Id})^{-1}||| \to 0$ lorsque $|z| \to +\infty$. Puisque ϕ est continue, cela impliquera que $\zeta(z) = \phi\left((u - z\mathrm{Id})^{-1}\right) \to 0$.
Pour tout $x \in E$, $||(u - z\mathrm{Id})x|| \geq ||zx|| - ||u(x)|| = (|z| - |||u|||)||x||$.
Donc, pour tout $y \in E$, si on pose $x = (u - z\mathrm{Id})^{-1}(y)$, on a $||y|| \geq (|z| - |||u|||)||(u - z\mathrm{Id})^{-1}(y)||$.
Cela implique que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > |||u|||$:

$$||(u - z\mathrm{Id})^{-1}(y)|| \leq \frac{||y||}{|z| - |||u|||} \qquad \forall y \in E$$
$$\Rightarrow \left|\left|\left|(u - z\mathrm{Id})^{-1}\right|\right|\right| \leq \frac{1}{|z| - |||u|||}$$

et cette dernière expression tend bien vers 0 lorsque $|z| \to +\infty$.
b) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Nous allons montrer que ζ est développable en série entière au voisinage de z_0. Quitte à poser $\tilde{u} = u - z_0\mathrm{Id}$, on peut supposer que $z_0 = 0$.
L'application u étant inversible (sinon 0 appartiendrait au spectre), on peut écrire $(u - z\mathrm{Id})^{-1} = u^{-1}(\mathrm{Id} - zu^{-1})^{-1}$. Lorsque $|z| < \frac{1}{|||u^{-1}|||}$, on a :

$$(u - z\mathrm{Id})^{-1} = u^{-1} \circ \left(\sum_{n\geq 0} z^n u^{-n}\right) = \sum_{n \geq 0} z^n u^{-(n+1)}$$

La série converge absolument. On a donc :

$$\phi\left((u - z\mathrm{Id})^{-1}\right) = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} z^n \phi(u^{-(n+1)})\right)$$

Puisque ϕ est continue, il existe $C > 0$ tel que, pour toute $f \in \mathcal{L}_c(E)$, $|\phi(f)| \leq C|||f|||$. Alors, pour tout n, $|z^n\phi(u^{-(n+1)})| \leq C|||u^{-1}|||^{n+1}|z|^n$. La série de l'équation précédente converge donc lorsque $|z| < \frac{1}{|||u^{-1}|||}$ et on a donc :

$$\zeta(z) = \sum_{n\geq 0} z^n \phi(u^{-(n+1)})$$

2. La fonction u n'est pas nulle (sinon son spectre serait $\{0\}$, donc non-vide). Donc u^{-1} n'est pas non plus la fonction nulle.
D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $\phi : \mathcal{L}_c(E) \to \mathbb{C}$ une application linéaire continue telle que $\phi(u^{-1}) \neq 0$.
Définissons ζ comme à la question précédente. Il s'agit d'une fonction développable en série entière en tout point telle que $\zeta(z) \to 0$ lorsque $|z| \to +\infty$. D'après le lemme, elle est identiquement nulle. C'est imposible car $\zeta(0) = \phi(u^{-1}) \neq 0$.
3. a) Si W est identiquement nulle, c'est clair. Sinon, soit $m_0 = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}}|W(z)| > 0$. Il existe $R > 0$ tel que, si $|z| > R$, alors $|W(z)| \leq m_0/2$.
Pour un tel R, on a $m_0 = \sup\limits_{|z|\leq R}|W(z)|$. Puisque $\overline{B}(0,R)$ est un compact de $\mathbb{C}$ et $|W|$ est continue, $|W|$ atteint sa borne supérieure, c'est-à-dire m_0, sur $\overline{B}(0,R)$. Donc le maximum de $|W|$ est atteint.
b) On note $W(z) = \sum\limits_n a_n(z-z_0)^n$ sur un certain voisinage de z_0. On veut montrer que tous les a_n sont nuls pour $n \geq 1$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Soit N le plus petit entier strictement positif tel que $a_N \neq 0$.
Alors $W(z) = a_0 + a_N(z-z_0)^N + o(|z-z_0|^N)$ en z_0. Puisque $|W(z_0)| = m_0$, $a_0 = m_0e^{i\theta_0}$ pour un certain réel θ_0.
Posons $a_N = \rho e^{i\theta_N}$, avec ρ, θ_N deux réels tels que $\rho > 0$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, $W(z_0 + te^{i(\theta_0-\theta_N)/N}) = e^{i\theta_0}(m_0 + t^N\rho) + o(t^N)$. On a donc $|W(z_0 + te^{i(\theta_0-\theta_N)/N})| = m_0 + t^N\rho + o(t^N)$. Lorsque t est strictement positif mais assez proche de 0 :

$$|W(z_0 + te^{i(\theta_0-\theta_N)/N})| > m_0$$

C'est en contradiction avec la définition de m_0.
c) Soit x un point où W atteint son maximum. On pose $y_0 = W(x)$. C'est un complexe tel que $|y_0| = m_0$. Soit $A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } W(z) = y_0\}$.
C'est un ensemble fermé car W est une fonction continue. D'après la question b), c'est aussi un ouvert de $\mathbb{C}$. C'est un ensemble non-vide. Puisque $\mathbb{C}$ est connexe, on doit avoir $A = \mathbb{C}$.
La fonction W est donc constante en y_0. Comme elle tend vers 0 en ∞, $y_0 = 0$ et W est la fonction nulle.

Exercice 3

1. Soit $f \in L^2([0;1])$. C'est aussi une fonction de L^1, d'après l'inégalité de Hölder. Donc, pour tout x, $\int_0^x f(t)dt$ est bien définie.

De plus, pour tous $x, x' \in [0;1]$:

$$|H(f)(x) - H(f)(x')| = \left|\int_x^{x'} f(t)dt\right|$$
$$\leq \int_x^{x'} |f(t)|dt \leq \sqrt{\left|\int_x^{x'} f(t)^2 dt\right|}\sqrt{\left|\int_x^{x'} 1dt\right|} \leq ||f||_2\sqrt{|x-x'|}$$

La fonction $H(f)$ est donc continue. En particulier, elle appartient bien à L^2.
De plus, d'après l'inégalité précédente, si $||f||_2 \leq 1$, $|H(f)(x) - H(f)(x')| \leq \sqrt{|x-x'|}$ pour tous $x, x' \in [0;1]$. La famille $\{H(f) \text{ tq } ||f||_2 \leq 1\}$ est donc équicontinue.
De plus, pour tout $x \in [0;1]$ et toute f telle que $||f||_2 \leq 1$, $|H(f)(x)| \leq \sqrt{x} + |H(f(0))| = \sqrt{x}$. Donc, pour tout x, $\{H(f)(x) \text{ tq } ||f||_2 \leq 1\}$ est borné (donc d'adhérence compacte) dans $\mathbb{R}$.
D'après le théorème d'Ascoli, l'ensemble $\{H(f) \text{ tq } ||f||_2 \leq 1\}$ est donc d'adhérence compacte dans $(\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$. L'injection $i : (\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), ||.||_\infty) \to (L^2([0;1]), ||.||_2)$ est continue (car $||.||_2 \leq ||.||_\infty$) donc $\{H(f) \text{ tq } ||f||_2 \leq 1\}$ est d'adhérence compacte dans $L^2([0;1])$.
L'opérateur H est compact.

2. Supposons que $H(f) = \lambda f$ et montrons que $f = 0$.
Premier cas : $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.
Alors, puisque $H(f)$ est continue (on l'a vu à la question précédente), f l'est aussi. Alors $H(f)$ est la primitive d'une fonction continue. C'est donc une fonction différentiable et f est également différentiable. En dérivant l'égalité $H(f) = \lambda f$, on trouve :

$$f = \lambda f'$$

Il existe alors $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = ce^{t/\lambda}$ pour tout $t \in [0;1]$. Puisque $f(0) = \frac{1}{\lambda}H(f)(0) = 0$, $c = 0$ donc $f = 0$.

Deuxième cas : $\lambda = 0$.
Puisque la fonction f est de classe L^1, la fonction $H(f)$ est dérivable presque partout, de dérivée f. Puisque $H(f) = 0$, $f = 0$. Le résultat selon lequel $H(f)$ est dérivable presque partout se trouve par exemple dans Rudin (théorème 8.17).
Si on ne souhaite pas utiliser ce théorème, on peut remarquer, en utilisant Fubini, que si $H(f) = 0$, alors, pour toute fonction $g \in L^1([0;1])$:

$$0 = \int_0^1 H(f)(x)g(x)dx = \int_0^1 f(t)\left(\int_t^1 g(x)dx\right)dt = \int_0^1 f(t)G(t)dt$$

où l'on a posé $G(t) = \int_t^1 g(x)dx$.
En particulier, pour toute fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ valant 0 en 1, $\int_0^1 f(t)h(t)dt = 0$ (car il existe $g \in L^1$ tel que $h(t) = \int_t^1 g(x)dx$). Comme $H(f)(1) = 0$, c'est aussi vrai lorsque h est identiquement égale à 1. C'est donc vrai pour toutes les fonctions constantes. C'est donc vrai pour toute fonction h de classe $\mathcal{C}^1$, quelle que soit sa valeur en 1. Par continuité, pour toute fonction $h \in L^2$, $\int_0^1 f(t)h(t)dt$. Cela implique que f est nulle.

3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, $H - \lambda\mathrm{Id}$ est un opérateur de Fredholm d'indice nul. Il est inversible si et seulement si il n'admet pas de vecteur propre, ce qui est le cas d'après la question 2. Donc λ n'appartient pas au spectre.

En revanche, 0 appartient toujours au spectre d'un opérateur compact (lorsque l'espace de définition est de dimension infinie). On a donc $\mathrm{Sp}(H) = \{0\}$.
L'application H n'est pas nilpotente, sinon son noyau ne serait pas réduit à 0, c'est-à-dire que 0 serait valeur propre, ce qui n'est pas le cas par b).

Exercice 4
Si H est de dimension finie, S lui-même est de rang fini donc la suite constante convient. Supposons maintenant H de dimension infinie.
Commençons par le cas où H est séparable. Soit alors $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit P_N la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\,\{e_0, ..., e_N\}$.
On pose, pour tout n, $S_n = P_n \circ S$. C'est un opérateur de rang fini puisque son image est incluse dans $\mathrm{Vect}\,\{e_0, ..., e_n\}$.
Montrons que $S_n \to S$ lorsque $n \to +\infty$. Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Posons $K = \overline{S(B_E(0,1))}$. L'ensemble K est compact puisque S est un opérateur compact.
Pour tout n, posons $V_{n,\epsilon} = \{x \in H \text{ tq } d(x, \mathrm{Vect}\,\{e_0, ..., e_n\}) < \epsilon\}$. Ce sont des sous-ensembles ouverts de H, emboîtés les uns dans les autres, dont l'union est égale à H (puisque $(e_n)_n$ est une base hilbertienne).
Puisque K est compact et puisque $\bigcup_n (V_{n,\epsilon} \cap K) = K$, il existe N tel que $K \subset V_{n,\epsilon}$ pour tout $n \geq N$.
Soit $n \geq N$ quelconque. Pour tout $x \in E$ tel que $||x|| < 1$, $S(x) \in K$ donc $S(x) \in V_{n,\epsilon}$. Donc $||S(x) - P_n \circ S(x)|| < \epsilon$. Donc :

$$\sup_{||x||<1} ||(S - S_n)(x)|| \leq \epsilon$$

Donc $|||S - S_n||| \leq \epsilon$.
Montrons enfin que le résultat est aussi vrai si H n'est pas séparable. Dans ce cas, on pose $H_0 = \overline{\mathrm{Vect}\,(K)}$ où $K = \overline{S(B_E(0,1))}$. Puisque K est un compact d'un espace métrique, c'est un espace séparable. On peut donc vérifier que H_0 l'est aussi.
L'opérateur S est à images dans $\mathrm{Vect}\,(S(B_E(0,1))) \subset H_0$. D'après la première partie du raisonnement, si on considère S comme un opérateur de E dans H_0 et non comme un opérateur de E dans H, on obtient qu'il est limite uniforme d'opérateurs de rang fini.

Exercice 5
1. a)

$$\begin{aligned}
||(A - z\mathrm{Id})(x)||^2 &= \langle A(x) - \Re(z)x - i\mathrm{Im}\,(z)x, A(x) - \Re(z)x - i\mathrm{Im}\,(z)x\rangle \\
&= ||A(x) - \Re(z)x||^2 + |\mathrm{Im}\,z|^2||x||^2 + i(\langle \mathrm{Im}\,(z)x, A(x) - \Re(z)x\rangle \\
&\quad - i\langle A(x) - \Re(z)x, \mathrm{Im}\,(z)x\rangle \\
&= ||A(x) - \Re(z)x||^2 + |\mathrm{Im}\,z|^2||x||^2 \\
&\geq |\mathrm{Im}\,z|^2||x||^2
\end{aligned}$$

b) $\overline{\mathrm{Im}\,(A - z\mathrm{Id})}^{\perp} = \mathrm{Ker}\,((A - z\mathrm{Id})^*) = \mathrm{Ker}\,(A - \overline{z}\mathrm{Id})$

Or, d'après la question précédente appliquée à $\overline{z}$ au lieu de z, $A - \overline{z}\mathrm{Id}$ a un noyau réduit à 0 si $\mathrm{Im}\, z \neq 0$.
Donc $\overline{\mathrm{Im}\,(A - z\mathrm{Id})}^{\perp} = \{0\}$, ce qui implique que $\overline{\mathrm{Im}\,(A - z\mathrm{Id})} = H$.
c) Soit z quelconque tel que $\mathrm{Im}\, z \neq 0$. Montrons que $z \notin \mathrm{Sp}(A)$.
D'après la question a), $\mathrm{Ker}\,(A - z\mathrm{Id}) = \{0\}$.
Posons $E = \mathrm{Im}\,(A - z\mathrm{Id})$. D'après la question a), c'est un fermé de H (car $||(A - z\mathrm{Id})(x)|| \geq |\mathrm{Im}\, z|.||x|| = |\mathrm{Im}\, z|.d(x, \mathrm{Ker}\,(A - z\mathrm{Id})))$. Comme c'est un ensemble dense d'après b), on a $E = H$.
L'application $A - z\mathrm{Id}$ est donc une bijection linéaire continue de H dans lui-même. Par le théorème de l'isomorphisme, c'est un isomorphisme : $A - z\mathrm{Id}$ est inversible et $z \notin \mathrm{Sp}(A)$.

2. a) Commençons par montrer le résultat pour H complexe.
Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(A))$.
En effet, puisque λ est racine de $P(X) - P(\lambda)$, il existe Q un polynôme tel que $P(X) - P(\lambda) = (X - \lambda)Q(X)$ Alors $P(A) - P(\lambda)\mathrm{Id} = (A - \lambda\mathrm{Id})Q(A)$ et ne peut pas être inversible (sinon $Q(A)\left(P(A) - P(\lambda)\mathrm{Id}\right)^{-1} = \left(P(A) - P(\lambda)\mathrm{Id}\right)^{-1} Q(A)$ serait son inverse à gauche et à droite).
Réciproquement, si $\mu \in \mathrm{Sp}(P(A))$, on peut écrire $P(X) - \mu = \alpha(X - x_1)...(X - x_n)$.
Si $P(A) - \mu$ n'est pas inversible sur H, il existe k tel que $A - x_k\mathrm{Id}$ n'est pas inversible. Alors x_k est un élément du spectre de A sur H.
Donc $x_k \in \mathrm{Sp}(A)$ et $P(x_k) - \mu = 0$ soit $\mu = P(x_k)$.

Traitons maintenant le cas où H est réel.
On peut voir H comme un sous-espace d'un espace de Hilbert complexe, $H_{\mathbb{C}}$. Cet ensemble $H_{\mathbb{C}}$ est défini comme $\{x + ix' \text{ tq } x, x' \in H\}$, avec l'addition et la multiplication par des scalaires qui s'imposent. On peut prolonger A à $H_{\mathbb{C}}$ en une application $\mathbb{C}$-linéaire, qu'on note $A_{\mathbb{C}}$.
L'application $A_{\mathbb{C}}$ est toujours autoadjointe :

$$\begin{aligned}
\langle A_{\mathbb{C}}(x + ix'), y + iy' \rangle &= \langle A(x), y \rangle - i\langle A(x'), y \rangle + i\langle A(x), y' \rangle + \langle A(x'), y' \rangle \\
&= \langle x, A(y) \rangle - i\langle x', A(y) \rangle + i\langle x, A(y') \rangle + \langle x', A(y') \rangle \\
&= \langle x + ix', A_{\mathbb{C}}(y + iy') \rangle
\end{aligned}$$

De plus, on remarque qu'un opérateur $B : H \to H$ est inversible si et seulement si $B_{\mathbb{C}} : H_{\mathbb{C}} \to H_{\mathbb{C}}$ l'est.
En effet, si B l'est, et si ϕ est son inverse, $\phi_{\mathbb{C}}$ est l'inverse de $B_{\mathbb{C}}$. D'autre part, si $B_{\mathbb{C}}$ est inversible, d'inverse ϕ, alors la restriction de ϕ à H (dont on peut montrer qu'il prend ses images dans H) est l'inverse de B.
En appliquant cette remarque à $B - x\mathrm{Id}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient que $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(B_{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{R}$.
Si B est autoadjoint, on a donc $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(B_{\mathbb{C}})$ (car $\mathrm{Sp}(B_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{R}$).
On a $P(A)_{\mathbb{C}} = P(A_{\mathbb{C}})$ et $P(A)_{\mathbb{C}}$ est autoadjoint donc $\mathrm{Sp}(P(A)_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Sp}(P(A))$. D'après la première partie de la question, cela implique $\mathrm{Sp}(P(A)) = P(\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{C}})) = P(\mathrm{Sp}(A))$.
b) D'après la question 1 de l'exercice 1, $|||P(A)||| = \sup\limits_{x \in \mathrm{Sp}(P(A))} |x| = \sup\limits_{x \in \mathrm{Sp}(A)} |P(x)|$.
c) L'ensemble des polynômes est dense dans $\mathcal{C}^0(\mathrm{Sp}(A), \mathbb{R})$. Puisque $P \to P(A) \in \mathcal{L}_c(H)$ est une isométrie et $\mathcal{L}_c(H)$ est complet, cette application se prolonge de manière unique (et le prolongement est toujours une isométrie).

d) C'est vrai lorsque f et g sont des polynômes. Par continuité de ϕ_A, c'est donc vrai pour toutes fontions f, g.
e) Pour tous x, y, $\langle f(A)x, y\rangle = \langle x, f(A)y\rangle$ lorsque f est un polynôme. Par continuité, c'est vrai pour toute fonction f.

3. a) Si $f \geq 0$, alors $\sqrt{f}$ est bien définie. On a $\mu(f) = \langle \sqrt{f}(A).\sqrt{f}(A)\xi, \xi\rangle = \langle \sqrt{f}(A)\xi, \sqrt{f}(A)\xi\rangle \geq 0$.
b) Si f est nulle sur $\mathrm{Sp}(A)$, $f(A) = 0$ donc $\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x) = 0$. Cela implique que $\mu(\mathbb{R} - \mathrm{Sp}(A)) = 0$.
c) Si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, alors $||f(A)\xi||^2 = \langle f(A)\xi, f(A)\xi\rangle = \langle f^2(A)\xi, \xi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)d\mu(x) = ||f||_2^2$.
L'application $G : f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \to f(A)\xi \in H$ est donc unitaire au sens de la norme L^2 sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Elle se prolonge donc par continuité à tout $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ (car l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ si μ est une mesure de Radon). L'opérateur ainsi obtenu est toujours unitaire.
Son image est dense car elle contient Vect $\{A^n\xi\}$. En effet, pour tout n, il existe une application continue à support compact qui est égale à $x \to x^n$ sur $\mathrm{Sp}(A)$. Si on note f une telle application, on a $f(A) = A^n$ donc $f(A)\xi = A^n\xi$.
De même qu'à la question 1.c), elle est donc inversible : G est un isomorphisme.
d) Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Alors $A \circ G(f) = (Af(A))\xi = (g(A))\xi$ si on note $g(x) = xf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par densité de l'ensemble des fonctions continues à support compact, c'est vrai sur tout $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Donc $G^{-1} \circ A \circ G(f) = g = (x \to xf(x))$.

4. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.
On construit les H_n par récurrence de sorte que ces espaces soient en somme directe, vérifient la deuxième propriété demandée et soient tels que $e_n \in H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_n$ pour tout n.
On pose $H_0 = \overline{\mathrm{Vect}\,\{A^k e_0, k \in \mathbb{N}\}}$.
Pour tout n, soit $e_n \in H_1 \oplus ... \oplus H_{n-1}$ et alors on pose $H_n = \{0\}$, soit ce n'est pas le cas et alors on note y la projection de e_n sur $(H_1 \oplus ... \oplus H_{n-1})^\perp$.
On prend $H_n = \overline{\mathrm{Vect}\,\{A^k y, k \in \mathbb{N}\}}$. C'est bien un sous-espace vectoriel fermé. De plus, il est orthogonal à H_k pour tout $k < n$ car $y \in H_k^\perp$ et A laisse H_k stable (donc aussi $H_k^\perp$). Enfin, $e_n \in H_1 \oplus ... \oplus H_n$.

5. Sur chacun des H_n de la question précédente, on applique le résultat de la question 3. On obtient donc (μ_n) des mesures à support compact inclus dans $\mathrm{Sp}(A)$ et (G_n) des isomorphismes d'espaces de Hilbert de $L^2(\mathbb{R}, \mu_n)$ vers H_n.
On définit $G((f_n)) = G_1(f_1) + G_2(f_2) + ...$ pour tout $(f_n) \in L^2(\mathbb{R}, \mu_1) \oplus L^2(\mathbb{R}, \mu_2) \oplus ....$ Cet opérateur est bien défini, continu car les G_k sont unitaires, et inversible (on peut exprimer son inverse en fonction des G_k^{-1}).
$G^{-1} \circ A \circ G(f_1, f_2, ...) = (G_1^{-1} \circ A \circ G_1(f_1), G_2^{-1} \circ A \circ G_2(f_2), ...) = (x \to xf_1(x), x \to xf_2(x), ...)$