Feuille d'exercices n^{o}11

Dans ce TD, sauf mention contraire, la « différentiabilité » désigne la « Fréchet-différentiabilité ».

Exercice 1 : questions diverses

1. Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $f : E \to F$ une fonction différentiable en un point $x_0 \in E$. Montrer que, si on remplace les normes de E et F par des normes équivalentes, alors f reste différentiable en x_0, de même dérivée.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \det(M)$ est différentiable en tout point.
b) Calculer sa différentielle en Id.
c) Soit $M_0 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle de det en M_0.
d) Soit $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle de det en M_0 en fonction de la comatrice de M_0.

3. La composée de deux fonctions Gâteaux-différentiables est-elle nécessairement Gâteaux-différentiable ?

Exercice 2 : différentiabilité des normes

1. Soit $(H, ||.||)$ un espace de Hilbert. En quels points de H la norme est-elle différentiable ?

2. En quels points $||.||_1$ est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

3. Soit E un espace vectoriel normé et Ω un ouvert. Soit d une distance sur Ω. Montrer que $d(.,.)$ n'est pas différentiable sur Ω^2.

Exercice 3 : fonctions homogènes
Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient E et F deux espaces de Banach réels. Une application $f : E \to F$ est *homogène de degré* k si, pour tout $x \in E$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(tx) = t^k f(x)$.

1. On suppose que f est homogène de degré k et différentiable en-dehors de 0. Montrer que, pour tout $x \neq 0$ et $t \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$df(x).x = kf(x) \qquad\qquad df(tx) = t^{k-1}df(x)$$

2. Montrer qu'une application f homogène de degré k et de classe $\mathcal{C}^k$ vérifie :
$$\forall h \in E, f(h) = \frac{1}{k!}d^k f(0).(h, ..., h)$$
[c'est-à-dire que f est induite par une application k-multilinéaire.]

3. Cela reste-t-il vrai si f n'est pas de classe $\mathcal{C}^k$?

Exercice 4 : fonction à dérivées successives prescrites
On rappelle que le *support* d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'adhérence de $f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$. Dans cet exercice, on souhaite montrer le résultat suivant, dû à Borel :

> Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, I un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$. Il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, à support dans I, tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = c_n$.

1. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, à support dans $]-1, 1[$, qui vaut 1 au voisinage de 0.

2. On introduit, pour ε_n suffisamment petit pour que $]-\varepsilon_n, \varepsilon_n[\subset I$, la fonction

$$g_n(x) = c_n \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \frac{x^n}{n!}.$$

Montrer que si ε_n est assez petit, on a $\left|g_n^{(\alpha)}(x)\right| \leq 2^{-n}$ sur $\mathbb{R}$, pour tout $\alpha \in \{0, \ldots, n-1\}$.

3. Conclure, en utilisant la fonction $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.

Exercice 5 : théorème de Sard

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\Omega =]0;1[^m$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On dit que $x \in \Omega$ est un *point critique* de f si $df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ n'est pas surjective. On dit que $y \in \mathbb{R}^n$ est une *valeur critique* de f s'il existe un point critique $x \in \Omega$ tel que $y = f(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $m = n = 1$. Montrer que l'ensemble des valeurs critiques de f dans $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

[Indication : montrer d'abord que, pour tout $\epsilon > 0$, si $U \subset \Omega$ est un ouvert tel que $|f'(x)| \leq \epsilon$ pour tout $x \in U$, alors $\lambda(f(U)) \leq \epsilon\lambda(U)$, si λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.]

On suppose maintenant $m = 2$ et $n = 1$ et on va montrer le même résultat. On note :

$$C_1 = \{x \in \Omega \text{ tq } df(x) = 0\}$$
$$C_2 = \{x \in \Omega \text{ tq } df(x) = 0 \text{ et } df^{(2)}(x) = 0\}$$

2. a) Soit D un carré inclus dans Ω. Supposons qu'il existe $x_0 \in D$ tel que $df(x_0) = 0$. Montrer que, pour tout $x \in D$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{||x - x_0||^2}{2} \sup_{z \in D} ||d^{(2)} f(z)||$$

b) Montrer que $f(C_2)$ est de mesure nulle.

3. Soit $x_0 \in C_1 - C_2$. Puisque $d^{(2)} f(x_0) \neq 0$, il existe $i, j \in \{1, 2\}$ tels que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \neq 0$$

On suppose $i = 1$ et on pose $\rho = \frac{\partial f}{\partial x_j}$. On a donc $\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$.

Soit $h : \Omega \to \mathbb{R}^2$ l'application suivante :

$$h(x_1, x_2) = (\rho(x_1, x_2), x_2)$$

a) Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 sur lequel h est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme vers son image. Notons $\mathcal{V}'$ l'image de $\mathcal{V}$ par h et posons $g = f \circ h^{-1} : \mathcal{V}' \to \mathbb{R}$.

b) Montrer que $h(\mathcal{V} \cap C_1) \subset (\{0\} \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{V}'$.

c) Soit g_1 l'application telle que $g_1(t) = g(0, t)$ si $(0, t) \in \mathcal{V}'$. Montrer que si $h^{-1}(0, t) \in C_1$, alors t est un point critique de g_1.

d) En déduire que $f(C_1 \cap \mathcal{V})$ est de mesure nulle.

e) Montrer que $f(C_1 - C_2)$ est de mesure nulle.

4. Montrer que l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$.

[Ce résultat est vrai pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ et peut être démontré avec une méthode similaire à celle que nous avons utilisée pour le cas $m = 2, n = 1$. Le fait que Ω soit borné n'est pas nécessaire.
Le théorème est encore vrai si, au lieu de supposer f de classe $\mathcal{C}^\infty$, on suppose f de classe $\mathcal{C}^r$ avec $r > \max(0, m - n)$.]