Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$11

Corrigé

Exercice 1

1. Notons $||.||_E$ et $||.||_F$ les normes de E et F. Par définition de la différentiabilité, il existe une application linéaire continue $L_{x_0} : E \to F$ et une application g définie au voisinage de 0 telle que, pour tout h assez proche de 0 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L_{x_0}(h) + g(h) \tag{1}$$

et $\frac{||g(h)||_F}{||h||_E} \to 0$ quand $||h||_E \to 0$.
Supposons que $||.||'_E$ et $||.||'_F$ sont des normes sur E et F équivalentes aux précédentes. Soient $K_E, K_F > 0$ tels que :

$$\frac{1}{K_E}||.||_E \leq ||.||'_E \leq K_E||.||_E \qquad \frac{1}{K_F}||.||_F \leq ||.||'_F \leq K_F||.||_F$$

L'application L_{x_0} est toujours linéaire et continue si on change de normes (car les ouverts de E et de F restent les mêmes si on remplace les normes par des normes équivalentes).
De plus, $\frac{||g(h)||'_F}{||h||'_E} \leq K_E K_F \frac{||g(h)||_F}{||h||_E}$ donc $\frac{||g(h)||'_F}{||h||'_E} \to 0$ lorsque $||h||'_E \to 0$ (ce qui est équivalent à $||h||_E \to 0$).
L'équation (1) implique donc bien que l'application f est aussi différentiable pour les normes $||.||'_E$ et $||.||'_F$ et toujours de différentielle L_{x_0}.

2. a) Si on identifie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$, le déterminant est une application polynomiale. Elle est donc différentiable en tout point et même de classe $\mathcal{C}^\infty$.
b) Soient $i, j \in \{1, ..., n\}$. Soit $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui qui est situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne, qui vaut 1.
Pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\det(\mathrm{Id} + hE_{i,j}) = 1$ si $i \neq j$ et $\det(\mathrm{Id} + hE_{i,j}) = 1 + h$ si $i = j$.
On a donc $D\det(\mathrm{Id}).E_{i,j} = \delta_{i,j}$. Pour toute matrice M, on doit donc avoir $D\det(\mathrm{Id}).M = \sum\limits_{i,j} M_{i,j} D\det(\mathrm{Id}).E_{i,j} = \sum\limits_i M_{i,i} = \mathrm{Tr}(M)$.
c) $\det(M_0 + H) = \det(M_0)\det(\mathrm{Id} + M_0^{-1}H) = \det(M_0)(1 + \mathrm{Tr}(M_0^{-1}H) + o(M_0^{-1}H)) = \det(M_0) + \det(M_0)\mathrm{Tr}(M_0^{-1}H) + o(H)$.
Donc $D\det(M_0).H = \det(M_0)\mathrm{Tr}(M_0^{-1}H)$.
d) Pour M_0 inversible, on vient de voir que, pour toute H, $D\det(M_0).H = \det(M_0)\mathrm{Tr}(M_0^{-1}H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(M_0)H)$.
Comme det est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (d'après la première question) et comme l'ensemble des matrices inversibles est dense dans l'ensemble des matrices, cette égalité est vraie, par densité, pour toutes les matrices M_0, inversibles ou non.

3. Non.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $f(x_1, x_2) = 0$ sauf si $x_2 = x_1^2$ et $x_1 \neq 0$, auquel cas on prend $f(x_1, x_2) = 1$.
Pour tout (x_1, x_2) et tout $h \in \mathbb{R}$, $f(hx_1, hx_2) = 0$ si h est assez proche de 0 (car on ne peut pas avoir $hx_2 = h^2 x_1^2$ avec $hx_1 \neq 0$ pour plus d'une valeur de h). L'application f est donc Gâteaux-différentiable en 0, de dérivée nulle (l'application nulle est bien une application linéaire et continue).
L'application $x \to (x, x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En revanche, $x \to f(x, x^2)$ est l'application qui vaut 1 partout sauf en 0 où elle vaut 0 et n'est donc pas Gâteaux-différentiable.

Exercice 2

1. $x \to \langle x, x \rangle = ||x||^2$ est une application différentiable : $\langle x+h, x+h \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, h \rangle + o(h)$ pour tout $x \in H$.
Puisque l'application $\sqrt{.}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, l'application $x \to ||x||$ est dérivable (par composition) en tout $x \neq 0$.
En revanche, $||.||$ n'est pas dérivable en 0 : en effet, pour tout $h \neq 0$, $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{||th||}{t} = ||h|| \neq -||h|| = \lim\limits_{t \to 0^-} \frac{||th||}{t}$.
2. $||(x_1, x_2)||_1 = |x_1| + |x_2|$
L'application $|.|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc $||.||_1$ est dérivable en tout (x_1, x_2) tel que $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$.
Montrons que, pour tout x_2, $||.||_1$ n'est pas différentiable en $(0, x_2)$. En effet, $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{||(t,x_2)|| - ||x_2||}{t} = 1 \neq -1 = \lim\limits_{t \to 0^-} \frac{||(t,x_2)|| - ||x_2||}{t}$ donc l'application n'est même pas Gâteaux-différentiable.
De même, pour tout x_1, $||.||_1$ n'est pas différentiable en $(x_1, 0)$.
L'application $||.||_1$ est donc différentiable sur $\mathbb{R}^2 - ((\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}))$.
3. Dans cette question, on note D la différentielle, pour éviter les confusions avec la distance d.
Supposons par l'absurde que d est différentiable sur Ω^2. Pour tout $x \in \Omega$, (x, x) est un point où d atteint un minimum local. On doit donc avoir $Dd(x, x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.
Soit $x_0 \in \Omega$ quelconque. Soit $u \in E - \{0\}$ tel que $x_0 + tu \in \Omega$ pour tout $t \in [0; 1]$ (tout u de norme assez petite convient, puisque Ω est ouvert). Définissons $\phi : [0; 1] \to \mathbb{R}$ l'application telle que $\phi(t) = d(x_0, x_0 + tu)$.
Pour tout $t_0 \in [0; 1[$ et tout h assez petit, $|\phi(t_0 + h) - \phi(t)| = |d(x_0, x_0 + t_0 u) - d(x_0, x_0 + t_0 u + hu)| \leq d(x_0 + t_0 u, x_0 + t_0 u + hu)$.
Puisque $d(x_0 + t_0 u, x_0 + t_0 u + hu) = d(x_0 + t_0 u, x_0 + t_0 u) + Dd(x_0 + t_0 u).(hu) + o(h) = o(h)$, l'application ϕ est dérivable en t_0 de dérivée nulle.
L'application ϕ est donc de dérivée nulle en tout point. C'est une fonction constante. Donc $d(x_0, x_0 + u) = 0$. C'est en contradiction avec le fait que d est séparante.

Exercice 3

1. Lorsque $h \in \mathbb{R}$ tend vers 0 : $f((1+h)x) = f(x) + df(x).(hx) + o(h) = f(x) + hdf(x).x + o(h)$.
Or $f((1+h)x) = (1+h)^k f(x) = (1 + kh + o(h))f(x) = f(x) + h(kf(x)) + o(h)$.
Par unicité du développement limité, $df(x).x = kf(x)$.

$f(tx+u) = f(tx) + df(tx).u + o(u)$
De plus, $f(tx+u) = f(t(x+u/t)) = t^k f(x+u/t) = t^k(f(x) + df(x).(u/t) + o(u)) = f(tx) + t^{k-1}df(x).u + o(u)$.
Par unicité de la différentielle, on a donc $df(tx) = t^{k-1}df(x)$.

2. On procède par récurrence sur k.
Pour $k=0$, c'est vrai : pour tout $x \in E$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $f(tx) = f(x)$. Pour tout $t=0$, cela implique que, pour tout x, $f(x) = f(0)$.
Si c'est vrai pour $k-1$, démontrons-le pour k. Si f est homogène de degré k et de classe $\mathcal{C}^k$, df est homogène de degré $k-1$ et de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, d'après la deuxième inégalité de la première question (cette égalité est aussi valable en $t=0$, par continuité).
On a donc, pour tout x, $df(x) = \frac{1}{(k-1)!}df^{(k)}(0)(x,...,x)$, par hypothèse de récurrence.
D'après la première question, cela implique, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{k}df(x).x = \frac{1}{k!}df^{(k)}(0)(x,...,x)$.
C'est aussi vrai si $x=0$, par continuité.

3. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et 2π-périodique telle que $\phi(x+\pi) = -\phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
L'application $f : \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\rho e^{i\theta}) = \rho\phi(\theta)$ est une application homogène de degré 1. Pourtant, elle n'est pas nécessairement linéaire.

Exercice 4

1. Notons χ la fonction telle que $\chi(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $\chi(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$. On admet que c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, dont l'ensemble des zéros est exactement $\mathbb{R}^-$.
Posons $\chi_2(x) = \chi(x+1/2)\chi(-1/3-x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. C'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, nulle sur $]-\infty;-1/2] \cup [-1/3;+\infty[$ et strictement positive sur $]-1/2;-1/3[$. On note F sa primitive qui vaut 0 sur $]-\infty;-1/2]$. La fonction F est constante non-nulle sur $[-1/3;+\infty[$.
La fonction $\phi(x) = \frac{F(x)F(-x)}{F(0)^2}$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle vaut 0 sur $\mathbb{R} - [-1/2;1/2]$ donc est à support dans $]-1;1[$. Sur $[-1/3;1/3]$, elle est constante, de valeur 1.

2. Sur $\mathbb{R} -]-\epsilon_n;\epsilon_n[$, g_n est identiquement nulle donc l'inégalité est vérifiée. Il suffit de montrer que, pour ϵ_n assez petit, elle est aussi vérifiée sur $]-\epsilon_n;\epsilon_n[$.
Par la formule de dérivée des produits :

$$g_n^{(\alpha)}(x) = c_n \sum_{s=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{s} \frac{1}{\epsilon_n^s}\phi^{(s)}\left(\frac{x}{\epsilon_n}\right) \frac{x^{n-(\alpha-s)}}{(n-(\alpha-s))!}$$

Donc, lorsque $|x| < \epsilon_n$:

$$|g_n^{(\alpha)}(x)| \leq |c_n|\epsilon_n^{n-\alpha} \sum_{s=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{s} \left|\phi^{(s)}\left(\frac{x}{\epsilon_n}\right)\right| \frac{1}{(n-\alpha+s)!}$$

La fonction $\phi^{(s)}$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}$ (car elle est à support compact). Pour tout $\alpha < n$, le terme précédent tend donc vers 0 uniformément en x lorsque $\epsilon_n \to 0$. En particulier, si on choisit ϵ_n asse petit, on peut avoir $||g_n^{(\alpha)}||_\infty \leq 2^{-n}$ pour tout $\alpha < n$.

3. On choisit les ϵ_n comme dans la question précédente, de sorte que $||g_n^{(\alpha)}||_\infty \leq 2^{-n}$ pour tous n et α tels que $\alpha < n$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_n g_n^{(\alpha)}$ converge alors normalement. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout α :

$$\begin{aligned} & f^{(\alpha)} = \sum_n g_n^{(\alpha)} \\ \Rightarrow \qquad & f^{(\alpha)}(0) = g_\alpha^{(\alpha)}(0) = c_\alpha \end{aligned}$$

En effet, pour tout n, $g_n(x) = c_n \frac{x^n}{n!}$ au voisinage de 0 donc $g_n^{(\alpha)}(0) = c_n$ si $\alpha = n$ et 0 sinon.

Exercice 5

1. Soit U est un ouvert tel que $|f'(x)| \leq \epsilon$ pour tout $x \in U$. On peut écrire $U = \bigcup\limits_n]a_n; b_n[$ où les $]a_n; b_n[$ sont des intervalles ouverts disjoints.
Alors $\lambda(U) = \sum\limits_n \lambda(]a_n; b_n[)$.
De plus, pour tout n et tous $x, x' \in]a_n; b_n[$, d'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon|x - x'| \leq \epsilon\lambda(]a_n; b_n[)$. L'image par f de $]a_n; b_n[$ est donc un intervalle de diamètre inférieur ou égal à $\epsilon\lambda(]a_n; b_n[)$. Ainsi :

$$\lambda(f(U)) \leq \sum_n \lambda(f(]a_n; b_n[)) \leq \sum_n \epsilon\lambda(]a_n; b_n[) = \epsilon\lambda(U)$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on note $U_\epsilon = \{x \in \Omega \text{ tq } |f'(x)| < \epsilon\}$. Il s'agit d'un ouvert de Ω contenant l'ensemble des points critiques de f.
L'ensemble des valeurs critiques de f est donc inclus dans $f(U_\epsilon)$ pour tout ϵ, ce qui implique qu'il est de mesure au plus $\epsilon\lambda(U_\epsilon) \leq \epsilon\lambda(\Omega) = 2\epsilon$. En faisant tendre ϵ vers 0, on trouve bien qu'il est de mesure nulle.

2. a) C'est une conséquence l'inégalité de Taylor-Lagrange (qui est dans le cours), appliquée sur le segment qui joint x_0 et x.
b) Soit $\epsilon > 0$. Posons $U_\epsilon = \{x \in \Omega \text{ tq } ||d^{(2)}f(x)|| < \epsilon\}$. On admet qu'il existe $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un ensemble dénombrable de carrés inclus dans Ω tels que :

$$U_\epsilon = \bigcup_k D_k \qquad\qquad \lambda(U_\epsilon) = \sum_k \lambda(D_k)$$

Soient $k_1, k_2, \ldots$ les indices des carrés ayant une intersection non-vide avec C_2. Puisque $C_2 \subset U_\epsilon$, on doit avoir $C_2 \subset \bigcup\limits_s D_{k_s}$.
Pour tout s, il existe $x_0 \in C_2 \cap D_{k_s}$. Pour tout $x \in D_{k_s}$, d'après la question a), on a alors :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{||x - x_0||^2}{2} \sup_{z \in D_{k_s}} ||d^{(2)}f(z)|| \leq \frac{\operatorname{diam}^2(D_{k_s})}{2}\epsilon$$

L'ensemble $f(D_{k_s})$ est donc inclus dans le segment réel centré en $f(x_0)$ et de diamètre $\frac{\operatorname{diam}^2(D_{k_s})}{2}\epsilon = \epsilon\lambda(D_{k_s})$.
Donc $\lambda(f(D_{k_s})) \leq \epsilon\lambda(D_{k_s})$.
Donc $\lambda(f(C_2)) \leq \epsilon\sum\limits_s \lambda(D_{k_s}) \leq \epsilon\lambda(\Omega) = 4\epsilon$.

En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient que $\lambda(f(C_2)) = 0$.

3. a) $dh(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial \rho}{\partial x_2}(x_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\det(dh(x_0)) = \frac{\partial \rho}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$ et le théorème d'inversion locale indique que h, restreint à un certain voisinage de x_0, est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme vers son image.

b) Si $x \in C_1$, $\rho(x) = 0$, puisque $df(x) = 0$ pour tout $x \in C_1$.

c) $dg(x_1, x_2) = df(h^{-1}(x_1, x_2)) \circ (dh(h^{-1}(x_1, x_2)))^{-1}$ donc, par définition de C_1, $dg(x_1, x_2) = 0$ si $h^{-1}(x_1, x_2) \in C_1$ (car alors $df(h^{-1}(x_1, x_2)) = 0$).

Puisque $g_1'(t) = \frac{\partial g}{\partial x_2}(0, t)$, on a $g_1'(t) = 0$ si $h^{-1}(0, t) \in C_1$ (car alors, comme on vient de le voir, $dg(0, t) = 0$ donc $\frac{\partial g}{\partial x_2}(0, t) = 0$). Donc t est un point critique de g_1.

d) Si $y \in C_1 \cap \mathcal{V}$, $h(y)$ est de la forme $(0, t)$, d'après la question b). D'après la question c), t est un point critique de g_1. Donc $f(y) = f(h^{-1}(0, t)) = g_1(t)$ est une valeur critique de g_1. D'après la question 1., l'ensemble des valeurs critiques de g_1 est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$ (g_1 n'est pas nécessairement définie sur $]-1; 1[$ mais le résultat de la question 1. est en fait vrai pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$). Donc $f(C_1 \cap \mathcal{V})$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$.

e) Pour tout $x \in C_1 - C_2$, soit $\mathcal{V}_x$ un voisinage de x comme dans les questions précédentes, tel que $\lambda(f(C_1 \cap \mathcal{V}_x)) = 0$.

Pour tout compact $K \subset C_1 - C_2$, il existe un ensemble fini $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tel que $K \subset \bigcup\limits_k C_1 \cap \mathcal{V}_{x_k}$.

Alors $\lambda(f(K)) \leq \sum\limits_k \lambda(f(C_1 \cap \mathcal{V}_{x_k})) = 0$.

Puisque $\lambda(C_1 - C_2) = \sup\limits_{K \subset C_1 - C_2 \text{ compact}} \lambda(K)$, on a aussi $\lambda(C_1 - C_2) = 0$.

4. Les points critiques de f sont exactement les éléments de C_1 (car $df(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est non-surjective si et seulement si elle est nulle). Donc la mesure de l'ensemble des valeurs critiques de f vaut :

$$\lambda(f(C_1)) \leq \lambda(f(C_1 - C_2)) + \lambda(f(C_2)) = 0$$