Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$12

Exercice 1 : questions diverses

1. [Formes normales]
a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application telle que $f(x, y) = (x, x^2)$. Donner un exemple de $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes ϕ, ψ, définis au voisinage de $(0, 0)$, tels que :

(1) $\psi \circ f \circ \phi(a, b) = (a, 0)$ pour tout (a, b) assez proche de $(0, 0)$.

(2) $\psi(0, 0) = (0, 0)$ et $\phi(0, 0) = (0, 0)$

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application telle que $f(x, y) = (x, y^2)$. Montrer qu'il n'existe pas ϕ et ψ comme dans la question précédente.
c) [Application] Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert V non-vide de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, injective. Montrer que $n \leq m$ et que $df(x)$ est injective sur un ouvert dense de V.

2. [Une autre démonstration du théorème des fonctions implicites]
Soient E, F, G des espaces de Banach et $f : E \times F \to G$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit (x_0, y_0) un point de $E \times F$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$. On suppose que $\partial_y f(x_0, y_0)$ est un isomorphisme de F sur G.
a) On pose $g : E \times F \to E \times G$ l'application telle que $g(x, y) = (x, f(x, y))$. Montrer que g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de (x_0, y_0).
b) On note γ la réciproque de g, définie au voisinage de $(x_0, 0)$ et on note, pour tout $(x, z) \in E \times G$ assez proche de $(x_0, 0)$, $\gamma(x, z) = (\gamma_1(x, z), \gamma_2(x, z)) \in E \times F$.
Montrer que $\gamma_1(x, z) = x$ et que, pour tout couple $(x, z) \in E \times G$ assez proche de $(x_0, 0)$, $f(x, \gamma_2(x, z)) = z$.
c) On note ϕ l'application telle que $\phi(x) = \gamma_2(x, 0)$, définie sur un voisinage de x_0 dans E et à images dans F. Montrer que, pour tout (x, y) assez proche de (x_0, y_0) :

$$f(x, y) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad y = \phi(x)$$

3. [Théorème de d'Alembert-Gauss] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non-constant. Soit S l'ensemble des zéros de P'. En considérant $\mathbb{C} - P(S)$, montrer que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
[Indication : Utiliser le théorème d'inversion locale et un argument de connexité.]

4. Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un fermé. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $F = f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 2 : lemme de Morse

1. [Lemme de réduction régulière des formes quadratiques]
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées symétriques réelles de taille n. Fixons $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Soit :

$$\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to {}^tMA_0M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

a) Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa différentielle en Id.
b) Montrer que $d\phi(\mathrm{Id})$ est surjective.
c) Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $P : \mathcal{V} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

(1) $P(A_0) = \mathrm{Id}$

(2) $\forall A \in \mathcal{V}, A = {}^tP(A)A_0P(A)$

2. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0, df(0) = 0$ et $d^{(2)}f(0)$ est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
a) Montrer qu'il existe un voisinage de 0, $V \subset U$ et $(a_{i,j})_{i,j\leq n}$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de V vers $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x_1, ..., x_n) = x \in V, \qquad f(x) = \sum_{i,j\leq n} a_{i,j}(x)x_ix_j$$

[Indication : utiliser une formule de Taylor.]
b) Montrer qu'il existe V_1, V_2 deux voisinages de 0 inclus dans U et $\phi : V_1 \to V_2$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tels que $\phi(0) = 0$ et :

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in V_1, \quad f(\phi(x_1, ..., x_n)) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_n^2$$

[Une forme quadratique $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *non-dégénérée* s'il n'existe pas $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $q(x, y) = 0$ pour tout y.
La *signature* d'une forme quadratique non-dégénérée q, représentée par une matrice M, est le couple d'entiers (n_1, n_2) où n_1 est le nombre de valeurs propres positives de M et n_2 le nombre de valeurs propres négatives de M.]

Exercice 3 : descente de gradient
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne usuelle.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe telle que $f(x) \to +\infty$ lorsque $||x|| \to +\infty$.
1. Montrer que f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$ et que le minimum est atteint en un point unique, qu'on note x^*.
On suppose maintenant que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
On définit récursivement, pour tout $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha\nabla f(x_n)$$

2. On suppose que l'application $x \to \nabla f(x)$ est L-lipschitzienne pour un certain $L > 0$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad ||\nabla f(x) - \nabla f(y)|| \leq L||x - y||$$

a) Montrer que, pour tout n, $f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - ||\nabla f(x_n)||^2\alpha(1 - \frac{L\alpha}{2})$.
[Indication : écrire $f(x_{n+1}) - f(x_n)$ comme une intégrale.]

b) On suppose maintenant que $\alpha \leq 1/L$. Déduire de l'inégalité précédente que :

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &\leq f(x^*) + \langle \nabla f(x_n), x_n - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} ||\nabla f(x_n)||^2 \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2\alpha} \left(||x_n - x^*||^2 - ||x_{n+1} - x^*||^2 \right) \end{aligned}$$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_n) - f(x^*) \leq \frac{1}{2n\alpha} ||x_0 - x^*||^2$.
[Indication : Montrer d'abord que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis sommer les inégalités obtenues à la question précédente.]

3. On suppose toujours que $x \to \nabla f(x)$ est L-lipschitzienne mais on suppose de plus que f est m-fortement convexe pour un certain $m > 0$, c'est-à-dire que la fonction $x \to f(x) - \frac{m}{2}||x||^2$ est convexe.
a) Montrer que, pour tous x, y :

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{m}{2} ||x - y||^2$$

b) Montrer que, si α est plus petit qu'une certaine constante ne dépendant que de m et L, alors il existe $c \in]0; 1[$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad ||x_n - x^*|| \leq c^n ||x_0 - x^*||$$

Exercice 4 : théorème des extrema liés, dit aussi des multitplicateurs de Lagrange
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Soient $F, g_1, \ldots, g_k \in C^1(U; \mathbb{R})$ (avec $k < n$). On note Z l'ensemble suivant :

$$Z = \Big\{ x \in U \ \text{ tq } \ g_1(x) = \cdots = g_k(x) = 0 \Big\}.$$

On suppose qu'en tout point $x \in Z$, les formes linéaires $dg_1(x), \ldots, dg_k(x)$ sont linéairement indépendantes. On note $g = (g_1, \ldots, g_k)$.

1. On suppose que le point $a \in Z$ est un extremum local de la restriction de F à Z. On va montrer l'existence de coefficients réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, appelés *multiplicateurs de Lagrange*, tels que la relation suivante soit satisfaite :

$$dF(a) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i dg_i(a).$$

a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et un voisinage ouvert V de a inclus dans U tq :

$$Z \cap U = \Big\{ (x_1, \ldots, x_n) \in V \text{ tq } (x_1, \ldots, x_k) = \phi(x_{k+1}, \ldots, x_n) \Big\},$$

pour une certaine application ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ définie au voisinage de $\alpha = (a_{k+1}, \ldots, a_n)$, où $(x_1, ..., x_n)$ désignent les coordonnées d'un point x dans la base $\mathcal{B}$.

b) Montrer que $\operatorname{Ker} dg(a) = \Big\{ (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n \ \text{ tq } \ (h_1, \ldots, h_k) = d\phi(\alpha)(h_{k+1}, \ldots, h_n) \Big\}$.

c) En déduire que $\operatorname{Ker} dg(a) \subset \operatorname{Ker} dF(a)$. Conclure.

2. On suppose maintenant que Z est en fait défini par :

$$Z = \{x \in U \text{ tq } g_1(x), ..., g_k(x) \geq 0\}$$

On suppose que a est un minimum local de F sur Z et que $g_1(a) = ... = g_k(a) = 0$. On suppose toujours que, pour tout $x \in Z$, $dg_1(x), ..., dg_k(x)$ sont des formes linéaires indépendantes. Montrer qu'il existe $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$dF(a) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i dg_i(a)$$

Exercice 5 : théorème de Hadamard

Ce théorème énonce que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors il y a équivalence entre :

(1) f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

(2) f est propre et $df(x)$ est de déterminant non nul pour tout x (c'est-à-dire inversible pour tout x).

[On dit qu'une application est propre si l'image réciproque de tout compact est un compact.]
On veut démontrer l'équivalence précédente dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que (1) implique (2), puis que (2) implique que f est surjective (par un argument de connexité).

2. On suppose désormais que f vérifie (2). Soit $z \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = f(z)\}$ est fini.

3. Montrer que les solutions du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -(df(x))^{-1} \cdot \big(f(x) - f(z)\big) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

sont définies sur $[0, +\infty[$, puis que f est injective. Conclure.