Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$13

Exercice 1 : formes normales
On rappelle l'énoncé des théorèmes de forme normale.
Soient E, F deux espaces de Banach. Soit $x_0 \in E$. Soit $f : E \to F$ une application, de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0.
On suppose que $\mathrm{Ker}\,(df(x_0))$ et $\mathrm{Im}\,(df(x_0))$ sont fermés et facteurs directs. Soit F_1 un supplémentaire fermé de $\mathrm{Im}\,(df(x_0))$. Alors :

- Si $df(x_0)$ est **surjective**, il existe $U \subset \mathrm{Ker}\,(df(x_0)) \times F \to E$ un voisinage de $(0,0)$ et $\phi : U \to E$ une application qui réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur son image telle que :

$$\phi(0,0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad \forall (n,a) \in U, \quad f \circ \phi(n,a) = f(x_0) + a$$

- Si $df(x_0)$ est **injective**, il existe $U \subset \mathrm{Im}\,(df(x_0))$, $V \subset F$ des voisinages de (respectivement) 0 et $f(x_0)$ et $\phi : U \to E$, $\psi : V \to \mathrm{Im}\,(df(x_0)) \times F_1$ des applications qui réalisent des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes sur leurs images telles que :

$$\phi(0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad \psi(f(x_0)) = (0,0)$$
$$\forall a \in U, \quad \psi \circ f \circ \phi(a) = (a,0)$$

- Si df est de **rang (ou corang) fini et constant au voisinage de $\boldsymbol{x_0}$**, il existe $U \subset \mathrm{Ker}\,(df(x_0)) \times \mathrm{Im}\,(df(x_0))$ un voisinage de $(0,0)$, $V \subset F$ un voisinage de $f(x_0)$ et $\phi : U \to E$, $\psi : V \to \mathrm{Im}\,(df(x_0)) \times F_1$ des applications qui réalisent des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes sur leurs images telles que :

$$\phi(0,0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad \psi(f(x_0)) = (0,0)$$
$$\forall (n,a) \in U, \quad \psi \circ f \circ \phi(n,a) = (a,0)$$

1. Déduire des théorèmes qui précèdent les énoncés suivants.
Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application, de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0.

(1) Si $df(x_0)$ est surjective, alors $m \leq n$ et il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de 0 et $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ une application qui réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur son image telle que :

$$\phi(0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad \forall x = (x_1, ..., x_n) \in U, \quad f \circ \phi(x_1, ..., x_n) = f(x_0) + (x_1, ..., x_m)$$

(2) Si $df(x_0)$ est injective alors $m \geq n$ et il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de 0, $V \subset \mathbb{R}^m$ un voisinage de $f(x_0)$, $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ et $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ des applications qui réalisent des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes sur leurs images telles que :

$$\phi(0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad \psi(f(x_0)) = 0$$
$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in U, \quad \psi \circ f \circ \phi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$$

(3) Si df est de rang constant égal à r au voisinage de x_0, il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de 0, $V \subset \mathbb{R}^m$ un voisinage de $f(x_0)$, $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ et $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ des applications qui réalisent des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes sur leurs images telles que :

$$\phi(0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad \psi(f(x_0)) = 0$$
$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in U, \quad \psi \circ f \circ \phi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$$

2. Montrer que la propriété (2) de la question précédente peut être transformée en :

(2') Si $df(x_0)$ est injective, il existe $V \subset \mathbb{R}^m$ un voisinage de $f(x_0)$, $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ une application qui réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur son image telle que :

$$\psi(f(x_0)) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x = (x_1, ..., x_n) \text{ assez proche de } 0,$$
$$\psi \circ f(x_0 + (x_1, ..., x_n)) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$$

Exercice 2 : quelques exemples d'utilisation de Cauchy-Lipschitz

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $|f(t) - \cos(t)| < 1$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$). On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

a) Montrer que (S) admet une unique solution globale (c'est à dire définie sur $\mathbb{R}$ entier).
b) Montrer que f admet un zéro t_k sur chaque intervalle $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ ($k \in \mathbb{Z}$).
c) Montrer que, quel que soit x_0, la solution x de (S) est bornée.

2. Soient $f, g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues vérifiant $f(t,x) < g(t,x)$ pour tout $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$. On fixe $t_0 \in [0,1[$ et $a \in \mathbb{R}$ et on considère les systèmes

$$(S_f) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = a \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (S_g) \qquad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = a \end{cases}$$

a) Si x, y sont des solutions (de classe $\mathcal{C}^1$) de (S_f) et (S_g), définies sur tout $[t_0; 1]$, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $x(t) < y(t)$ pour tout $t \in]t_0; t_0 + \delta[$.
b) En déduire que $x(t) \leq y(t)$ pour tout $t \in [t_0; 1]$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$. On lui associe le champ de vecteurs $X(x) = -\nabla f$ et on considère le système différentiel associé

$$(S_X) \qquad \begin{cases} x'(t) = X(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

a) Montrer que le système (S_X) admet une unique solution maximale, définie sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
b) En considérant la fonction $f(x) = x^4/4$ pour $n = 1$, montrer que a n'est pas nécessairement égal à $-\infty$.

Exercice 3 : où l'on retrouve M. Bendixson
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^2)$ un champ de vecteurs. On considère l'équation différentielle suivante :

$$X'(t) = f(X(t)) \tag{$\star$}$$

On suppose que toutes les solutions maximales de ce système sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Pour tout $x_0 \in U$ et tout $s \in \mathbb{R}$, on pose $\phi_s(x_0) = X_{x_0}(s)$, où X_{x_0} est la solution de $(\star)$ telle que $X_{x_0}(0) = x_0$. On appelle ϕ le *flot* associé à $(\star)$.
Pour tout $x \in U$, on appelle *ensemble limite de* x l'ensemble suivant :

$$\omega(x) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\{\phi_t(x) \text{ tq } t \geq s\}}$$

[C'est l'ensemble des points d'adhérence de la solution X de $(\star)$ avec condition initiale x.]
Soit $x \in U$. On suppose qu'il existe $D \subset U$ un compact tel que $\phi_s(x) \in D$ pour tout $s \geq 0$.

1. a) Montrer que $\omega(x)$ est un compact non-vide.
b) Montrer que $\omega(x)$ est connexe.
c) Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}^+$, $\phi_s(\omega(x)) \subset \omega(x)$.
[Indication : démontrer et utiliser le fait que $\phi_{r_1+r_2}(y) = \phi_{r_1}(\phi_{r_2}(y))$ pour tous $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, y \in U$.]

Le but de l'exercice est de montrer une version simplifiée du théorème de Poincaré-Bendixson :

> Si $\omega(x)$ ne contient pas de point où f s'annule, alors il existe une solution périodique X de $(\star)$ telle que $\omega(x) = \{X(s), s \in \mathbb{R}\}$.

2. [Théorème de redressement du flot]
Soit $x_0 \in U$ un point tel que $f(x_0) \neq 0$. Soit D une droite passant par x_0, de vecteur directeur $\vec{u}$, telle que $f(x_0)$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$.
Montrer qu'il existe $V \subset U$ un voisinage de x_0, $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ et $\psi : V \to]-\epsilon_1; \epsilon_1[\times]-\epsilon_2; \epsilon_2[$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tels que :

(1) $\psi(x_0) = (0, 0)$

(2) $\psi^{-1}(]-\epsilon_1; \epsilon_1[\times\{0\}) \subset D$

(3) Si X est une solution maximale de l'équation $(\star)$ restreinte à V, alors $\psi(X)$ est une fonction de la forme $t \in]t_0 - \epsilon_2; t_0 + \epsilon_2[\to (a, t - t_0)$, pour certaines constantes $a \in]-\epsilon_1; \epsilon_1[, t_0 \in \mathbb{R}$.

L'ensemble $I = \psi^{-1}(]-\epsilon_1; \epsilon_1[\times\{0\}) \subset V \cap D$ (qui est un intervalle ouvert de D) est appelé *section transverse.*

On admet que l'ensemble des points d'intersection entre une section transverse I et l'image d'une solution maximale X de $(\star)$, définie sur $\mathbb{R}$, est toujours de l'une des trois formes suivantes :
– l'ensemble vide
– un singleton
– un ensemble dénombrable (fini ou infini) $\{X(t_k)\}$, où les points $X(t_k)$ sont disposés sur I dans le même ordre que les réels $\{t_k\}$ sont ordonnés dans $\mathbb{R}$.

[À l'aide du théorème de Jordan, la démonstration de ce résultat n'est pas très difficile mais tout de même assez technique.]

3. Montrer que si I est une section transverse, $\omega(x)$ a au plus un point d'intersection avec I.

4. Soit x comme dans la question 1. On suppose que f ne s'annule pas sur $\omega(x)$.
Soit $y \in \omega(x)$ quelconque. Soit X la solution de $(\star)$ pour la condition initiale $X(0) = y$.
a) Montrer que $X(\mathbb{R}^+) \subset \omega(x)$ et que $\omega(y) \subset \omega(x)$.
b) Montrer que X est périodique.
[Indication : considérer un point $z \in \omega(y)$ et une section transverse passant par z.]

5. Montrer que $\{X(s), s \in \mathbb{R}\}$ est ouvert et fermé dans $\omega(x)$ puis conclure.

Exercice 4 : théorème dû à Corominas et Sunyer i Balaguer
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$.
Montrer que f est une fonction polynomiale.