Feuille d'exercices n°13
Corrigé

Exercice 1

1.

(1) Puisque $df(x_0)$ est une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $n \geq m$.
Soit $\tilde{\phi} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ comme dans le théorème, avec $\tilde{U}$ voisinage de $(0,0)$ dans $\operatorname{Ker}(df(x_0)) \times \mathbb{R}^m$.
Soit $L : \mathbb{R}^n \to \operatorname{Ker}(df(x_0)) \times \mathbb{R}^m$ une application linéaire bijective telle que :

$$\forall (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad L(x_1, ..., x_m, 0, ..., 0) = (0, (x_1, ..., x_m))$$
$$\forall (x_{m+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad L(0, ..., 0, x_{m+1}, ..., x_n) \in \operatorname{Ker}(df(x_0)) \times \{0\}$$

Posons $\phi = \tilde{\phi} \circ L$ en tout point où cette application est bien définie. Puisque L est un isomorphisme et $\tilde{\phi}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, ϕ est aussi un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
Alors $\phi(0) = \tilde{\phi}(0,0) = x_0$ et, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, si on note $L(x) = (w, (x_1, ..., x_m))$, où w est l'image (projetée sur $\operatorname{Ker}(df(x_0))$) de $L(0, ..., 0, x_{m+1}, ..., x_n)$:

$$f \circ \phi(x_1, ..., x_n) = f \circ \tilde{\phi}(w, (x_1, ..., x_m)) = f(x_0) + (x_1, ..., x_m)$$

(2) Puisque $df(x_0)$ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $n \leq m$.
Soient $\tilde{U} \subset \operatorname{Im}(df(x_0)), \tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ et $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ comme dans le théorème.
Soit $L : \mathbb{R}^n \to \operatorname{Im}(df(x_0))$ une bijection linéaire.
Soit $M : \operatorname{Im}(df(x_0)) \times F_1 \to \mathbb{R}^m$ une bijection linéaire telle que :

$$\forall x \in \operatorname{Im}(df(x_0)), \quad M(x, 0) = (L^{-1}(x), 0, ..., 0)$$

On pose $\phi = \tilde{\phi} \circ L$ et $\psi = M \circ \tilde{\psi}$ partout où ces applications sont définies. Alors :

$$\phi(0) = \tilde{\phi}(0) = x_0 \qquad \psi(f(x_0)) = M(0,0) = 0$$

De plus, pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$ dans l'ensemble de définition de ϕ, on a :

$$\psi \circ f \circ \phi(x) = M \circ \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}(L(x)) = \tilde{\psi}(L(x), 0) = (L^{-1}(L(x)), 0, ..., 0) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0)$$

(3) Soient $\tilde{U} \subset \operatorname{Ker}(df(x_0)) \times \operatorname{Im}(df(x_0)), \tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ et $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ comme dans le théorème.
Soit $L : \mathbb{R}^n \to \operatorname{Ker}(df(x_0)) \times \operatorname{Im}(df(x_0))$ une bijection linéaire telle que $L(\mathbb{R}^r \times \{0\}^{n-r}) = \{0\} \times \operatorname{Im}(df(x_0))$ et $L(\{0\}^r \times \mathbb{R}^{n-r}) = \operatorname{Ker}(df(x_0)) \times \{0\}$. On écrira alors (abus de notation) :

$$L(x_1, ..., x_n) = (L(0, ..., 0, x_{r+1}, ..., x_n), L(x_1, ..., x_r, 0, ..., 0))$$

Soit $M : \mathrm{Im}\,(df(x_0)) \times F_1 \to \mathbb{R}^m$ une bijection linéaire telle que, pour tout $x \in \mathrm{Im}\,(df(x_0))$, $M(x,0) = (y,0,...,0)$, où $y \in \mathbb{R}^r$ est l'élément tel que $L(y,0) = (0,x)$.
On pose $\phi = \tilde{\phi} \circ L$ et $\psi = M \circ \tilde{\psi}$, partout où ces applications sont définies. Alors, pour tout $x = (x_1,...,x_n)$ dans l'ensemble de définition de ϕ :

$$\phi(0) = \tilde{\phi}(0,0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad \psi(f(x_0)) = M(0,0) = 0$$

$$\begin{aligned}\psi \circ f \circ \phi(x_1,...,x_n) &= M \circ \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}(L(0,...,0,x_{r+1},...,x_n), L(x_1,...,x_r,0,...,0)) \\ &= M(L(x_1,...,x_r,0,...,0),0) = (x_1,...,x_r,0,...,0)\end{aligned}$$

2. Soient U, V, ϕ, ψ comme dans la propriété (2).
Soit $\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ l'application $\gamma(x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_m) = (\phi(x_1,...,x_n) - x_0, x_{n+1},...,x_m)$. C'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme puisque ϕ l'est. De plus, pour tout $x = (x_1,...,x_n) \in U$:

$$\gamma \circ \psi \circ f \circ \phi(x_1,...,x_n) = \gamma(x_1,...,x_n,0,...,0) = (\phi(x_1,...,x_n) - x_0, 0,...,0)$$

L'application $\lambda : x \to \phi(x) - x_0$ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ vers un autre voisinage de 0. On a montré que $\gamma \circ \psi \circ f \circ (\lambda(x) + x_0) = (\lambda(x), 0, ..., 0)$ donc, pour tout $x = (x_1,...,x_n)$ appartenant à l'image de λ (c'est-à-dire pour tout x assez proche de 0) :

$$(\gamma \circ \psi) \circ f(x_0 + (x_1,...,x_n)) = (x_1,...,x_n,0,...,0)$$

Donc, en remplaçant ψ par $\gamma \circ \psi$, on a le résultat voulu.

Exercice 2

1. a) Soit $x :]a;b[\to \mathbb{R}$ la solution maximale. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, elle est unique. Montrons que $b = +\infty$. Le même raisonnement démontrerait aussi que $a = -\infty$.
La fonction f est bornée (car cos l'est). Si $b < +\infty$, la solution x peut se prolonger en b par $x(b) = x_0 + \int_0^b f(x(t))dt$. On peut alors la prolonger (par Cauchy-Lipschitz à nouveau) sur un intervalle de la forme $]a; b+\epsilon[$ avec $\epsilon > 0$. C'est en contradiction avec le fait que x est la solution maximale.
b) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(2k\pi) > \cos(2k\pi) - 1 = 0$ et $f((2k+1)\pi) < \cos((2k+1)\pi) + 1 = 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, f admet donc un zéro sur $[2k\pi, (2k+1)\pi]$.
c) Si x n'est pas bornée, il existe k tel que x prend la valeur t_k en un certain point T.
Alors x est solution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(T) = t_k \end{cases}$$

La solution de ce système différentiel est unique donc x est égal à la fonction constante en t_k. En effet, la fonction $x : t \to t_k$ est solution du système, puisque, pour tout t, $x'(t) = 0 = f(t_k) = f(x(t))$.
Donc x est une fonction constante et x est bornée.
2. a) $x'(t_0) = f(t_0, a) < g(t_0, a) = y'(t_0)$

Donc $y(t) - x(t) = (y'(t_0) - x'(t_0))(t - t_0) + o(t - t_0)$ est strictement positif lorsque $t - t_0$ est strictement positif et assez proche de 0. Il existe donc δ tel que, pour tout $t \in]t_0; t_0 + \delta[$:

$$y(t) > x(t)$$

b) Soit $I = \{t \in [t_0; 1] \text{ tq } \forall t' \in [t_0; t], x(t') \leq y(t')\}$. Cet ensemble est un intervalle de la forme $[t_0; T]$ ou $[t_0; T[$.
Il ne peut pas être de la forme $[t_0; T[$ car, s'il l'était, T appartiendrait à I, par continuité de x et y.
Il est donc de la forme $[t_0; T]$. Montrons que $T = 1$.
Si ce n'est pas le cas, on doit avoir $x(T) = y(T)$ (en effet, par définition de I, $x(T) \leq y(T)$; de plus, si l'inégalité est stricte, par continuité de x et y, on doit avoir $x < y$ sur un intervalle de la forme $[T; T + \epsilon[$ donc $[t_0; T + \epsilon[\subset I$ pour un certain $\epsilon > 0$).
Notons $a' = x(T) = y(T)$. D'après la question a), puisque x et y sont solutions des systèmes différentielles suivants :

$$(S_f) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(T) = a' \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (S_g) \qquad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(T) = a' \end{cases}$$

il existe $\delta > 0$ tel que $x < y$ sur $]T; T + \delta[$. Alors $[t_0; T + \delta[\subset I$. C'est en contradiction avec la définition de T.

3. a) Le fait que la solution maximale soit unique est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz. Elle est définie sur un intervalle de la forme $]a; b[$. Montrons que $b = +\infty$.
Posons $g :]a; b[\to \mathbb{R}$ la fonction telle que $g(t) = f(x(t))$.
Alors $g'(t) = df(x(t)).x'(t) = \langle \nabla f(x(t)), x'(t) \rangle = -||\nabla f(x(t))||^2$.
La fonction g est donc décroissante. Cela implique que x est bornée sur $[t_0; b[$. En effet, soit $M > f(x(t_0))$. Puisque $f(y) \to +\infty$ lorsque $||y|| \to +\infty$, il existe $R > 0$ tel que, si $||y|| \geq R$, alors $f(y) \geq M$. Pour tout $t \in [t_0; a[$, $f(x(t)) = g(t) \leq g(t_0) = f(x(t_0)) < M$ donc $||x(t)|| < R$.
Donc si $b < +\infty$, on peut, comme dans la question 1.a) de l'exercice, prolonger x en b et obtenir une contradiction avec le théorème de Cauchy-Lipschitz.
b) Pour la fonction $f(x) = x^4/4$, avec $n = 1$, on a $X(x) = -x^3$. L'équation est donc :

$$(S_X) \qquad \begin{cases} x'(t) = -x^3(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Si $x_0 \neq 0$, la fonction x ne s'annule pas (sinon elle est constante en 0, pour la même raison qu'en 1.c)). Alors $1 = -\frac{x'(t)}{x^3(t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)'(t)$.
Donc $\frac{1}{x^2(t)} = \frac{1}{x^2(t_0)} + 2(t - t_0)$ pour tout t dans l'intervalle de définition de x. La fonction x ne peut donc pas être définie en $t = t_0 - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2(t_0)}$. Elle n'est donc pas définie sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1. a) L'ensemble $\omega(x)$ est une intersection de compacts (car les fermés de U inclus dans D sont compacts, puisque D est compact) emboîtés et non-vides. C'est donc un compact non-vide.
b) On peut réécrire $\omega(x)$ comme une intersection dénombrable de compacts emboîtés :

$$\omega(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{\phi_t(x) \text{ tq } t \geq n\}}$$

Pour tout n, $\overline{\{\phi_t(x) \text{ tq } t \geq n\}}$ est l'adhérence d'un ensemble connexe (car connexe par arcs : c'est l'image de $[n;+\infty[$ par la fonction continue $t \to \phi_t(x)$) donc c'est un ensemble connexe.
On sait (c'était dans le partiel) qu'une intersection dénombrable de compacts connexes est connexe. Donc $\omega(x)$ est connexe.
c) Pour tous r_1, r_2 et tout $y \in U$, $\phi_{r_1}(\phi_{r_2}(y)) = \phi_{r_1+r_2}(y)$. En effet, si X_y est la solution de $(\star)$ telle que $X_y(0) = x$, $\phi_{r_1+r_2}(y) = X_y(r_1+r_2)$.
Or $X : t \to X_y(r_2+t)$ est la solution de $(\star)$ pour condition initiale $X(0) = X_y(r_2) = \phi_{r_2}(y)$. Donc $\phi_{r_1}(\phi_{r_2}(y)) = X(r_1) = X_y(r_2+r_1) = \phi_{r_1+r_2}(y)$.
L'applications $(s,y) \to \phi_s(y)$ est continue d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.
Si $s \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\phi_s(\omega(x)) &\subset \bigcap_{r\geq 0} \phi_s\left(\overline{\{\phi_t(x) \text{ tq } t \geq r\}}\right) \\
&\subset \bigcap_{r\geq 0} \overline{\phi_s\left(\{\phi_t(x) \text{ tq } t \geq r\}\right)} \\
&= \bigcap_{r\geq 0} \overline{\{\phi_{t+s}(x) \text{ tq } t \geq r\}} \\
&= \bigcap_{r\geq s} \overline{\{\phi_t(x) \text{ tq } t \geq r\}} = \omega(x)
\end{aligned}$$

2. a) Quitte à changer de repère, on peut supposer que $x_0 = 0$ et $D = \mathbb{R} \times \{0\}$.
D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'application $(y,s) \in U \times \mathbb{R} \to \phi_s(y) \in U$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Posons $\delta(r,t) = \phi_t((r,0))$ pour tous $r, t \in \mathbb{R}$ tels que $(r,0) \in U$. Alors δ est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculons $d\delta(0,0)$.
Puisque $\delta(r,0) = (r,0)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$ assez proche de 0, $d\delta(0,0).(h,0) = (h,0)$. De plus, $t \to \phi_t(0,0)$ est la solution de $(\star)$ pour la condition initiale $x_0 = (0,0)$ donc sa dérivée en $(0,0)$ est $f(x_0)$.
Donc $d\delta(0,0).(h,l) = h.(1,0) + l.f(x_0)$. Comme on a supposé que $f(x_0)$ n'est pas colinéaire à la direction de D (c'est-à-dire $(1,0)$), $d\delta$ est inversible au voisinage de $x_0 = 0$ (d'après le théorème d'inversion locale).
Notons ψ la réciproque de δ. Quitte à restreindre l'ouvert V de définition de ψ, on peut supposer que $\psi(V) =]-\epsilon_1;\epsilon_1[\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[$ pour certains réels $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$.
Montrons que les trois conditions voulues sont vérifiées.
La première l'est : $\delta(0,0) = (0,0) = x_0$ donc $\psi(x_0) = (0,0)$.
La deuxième l'est aussi : $\psi^{-1}(]-\epsilon_1;\epsilon_1[\times\{0\}) = \{\delta(r,0) \text{ tq } r \in]-\epsilon_1;\epsilon_1[\} =]\epsilon_1;\epsilon_1[\times\{0\} \subset D$.
Enfin, on a $V = \delta(]-\epsilon_1;\epsilon_1[\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[) = \{\phi_t((r,0)), r \in]-\epsilon_1;\epsilon_1[, t \in]-\epsilon_2;\epsilon_2[\}$. Soit X une solution maximale de l'équation différentielle $(\star)$ restreinte à V. Elle est définie sur un intervalle de la forme $]a;b[$.
Soit $T \in]a;b[$ quelconque. Puisque $V = \delta(]-\epsilon_1;\epsilon_1[\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$, il existe $(r_0,t_0) \in]-\epsilon_1;\epsilon_1[\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[$ tel que $X(T) = \delta(r_0,t_0) = \phi_{t_0}((r_0,0))$.
Puisque $t \in]T-t_0-\epsilon_2; T-t_0+\epsilon_2[\to \phi_{t-T+t_0}((r_0,0))$ est une solution de $(\star)$ qui coïncide avec X en T et puisque, à condition initiale fixée, la solution de $(\star)$ est unique :

$$\forall t \in]T-t_0-\epsilon_2; T-t_0+\epsilon_2[, \quad X(t) = \phi_{t-T+t_0}((r_0,0))$$

De plus, $\phi_{-\epsilon_2}((r_0,0)) \notin V$. En effet, sinon, on aurait $\phi_{-\epsilon_2}((r_0,0)) = \phi_{t_1}((r_1,0))$ pour un $(r_1,t_1) \in]-\epsilon_1;\epsilon_1[\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[$ et d'après l'indication de la question 1.c), on devrait avoir, pour tout $\eta > 0$ assez petit, $\phi_{-\epsilon_2+\eta}((r_0,0)) = \phi_\eta(\phi_{-\epsilon_2}((r_0,0))) = \phi_\eta(\phi_{t1}((r_1,0))) = \phi_{t_1+\eta}((r_1,0))$ ce qui serait en contradiction avec l'injectivité de δ sur $]-\epsilon_1;\epsilon_1[\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[$.
De même, $\phi_{\epsilon_2}((r_0,0)) \notin V$. La fonction $t \in]T-t_0-\epsilon_2;T-t_0+\epsilon_2[\to \phi_{t-T+t_0}((r_0,0)) = \delta(r_0,t-T+t_0)$ ne se prolonge donc pas sur V et est solution maximale. Elle est donc exactement égale à X, intervalle de définition compris.
Puisque ψ est la réciproque de δ, $\psi(X)$ est la fonction $t \in]T-t_0-\epsilon_2;T-t_0+\epsilon_2[\to (r_0,t-T+t_0)$. La condition (3) est donc également vérifiée.

3. On utilise les notations de la question 2. pour la section transverse I.
Soit X la solution de $(\star)$ pour la condition initiale x.
Supposons par l'absurde que $\omega(x)$ intersecte I en deux points A et B distincts, tels que $\psi(A) = (a,0)$ et $\psi(B) = (b,0)$ pour des réels $a,b \in]-\epsilon_1;\epsilon_1[$ distincts.
Soient $W_a, W_b \subset]-\epsilon_1;\epsilon_1[$ des intervalles ouverts disjoints contenant respectivement a et b.
Puisque $\psi^{-1}(W_a\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$ est un voisinage de A et puisque $A \in \omega(x)$ est un point d'adhérence de X, il existe T_1 tel que $X(T_1) \in \psi^{-1}(W_a\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$.
Notons S_1 l'intervalle maximal contenant T_1 tel que X prend ses valeurs dans V sur S_1. D'après la propriété (3) de la question 2., S_1 est de la forme $]t_1-\epsilon_2;t_1+\epsilon_2[$ et $X(t) = \psi^{-1}(\alpha, t-t_1)$ pour tout $t \in S_1$, où $\alpha \in]-\epsilon_1;\epsilon_1[$ et $t_1 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.
Puisque $X(T_1) \in \psi^{-1}(W_a\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$, $\alpha \in W_a$. Donc $X(t_1) = \psi^{-1}(\alpha,0) \in \psi^{-1}(W_a\times\{0\})$. De plus, puisque $T_1 \in S_1 =]t_1-\epsilon_2;t_1+\epsilon_2[$, $|T_1-t_1| < \epsilon_2$.
On a donc trouvé $t_1 \in]T_1-\epsilon_2;T_1+\epsilon_2[$ tel que $X(t_1) \in \psi^{-1}(W_a\times\{0\})$.
Soit maintenant $T_2 > T_1+2\epsilon_2$ tel que $X(T_2) \in \psi^{-1}(W_b\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$. Il existe car $B \in \psi^{-1}(W_b\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$ est point d'adhérence de X. De même que précédemment, on peut trouver $t_2 \in]T_2-\epsilon_2;T_2+\epsilon_2[$ tel que $X(t_2) \in \psi^{-1}(W_b\times\{0\})$ et on a $t_2 > t_1$.
On peut ensuite trouver $t_3 > t_2$ tel que $X(t_3) \in \psi^{-1}(W_a\times\{0\})$.
Alors $X(t_1), X(t_2), X(t_3)$ sont trois points d'intersection de X avec I dont au moins deux sont distincts. Cependant, $X(t_2)$ n'est pas situé entre $X(t_1)$ et $X(t_3)$ (puisque $X(t_1)$ et $X(t_3)$ appartiennent à l'intervalle $\psi^{-1}(W_a\times\{0\})$ alors que $X(t_2)$ appartient à l'intervalle $\psi^{-1}(W_b\times\{0\})$, qui est disjoint du précédent) alors que $t_1 < t_2 < t_3$. C'est donc en contradiction avec le résultat que nous venons d'admettre.

4. a) D'après la question 1.c), $\phi_s(y) \in \omega(x)$ pour tout $s \geq 0$. Donc $X(\mathbb{R}^+) \subset \omega(x)$. Puisque $\omega(y) \subset \overline{X(\mathbb{R}^+)}$ et puisque $\omega(x)$ est un compact contenant $X(\mathbb{R}^+)$, on a aussi $\omega(y) \subset \omega(x)$.
b) Soit $z \in \omega(y)$. Soit I une section transverse passant par z, construite comme à la question 2. (on peut appliquer cette construction car f ne s'annule pas sur $\omega(x)$ donc, comme $z \in \omega(y) \subset \omega(x)$, $f(z) \neq 0$).
De la même façon qu'à la question 3., on peut montrer qu'il existe $0 < t_1 < t_2$ deux réels tels que $X(t_1) \in I$ et $X(t_2) \in I$. Puisque $X(\mathbb{R}^+) \subset \omega(x)$ et puisque $\omega(x)$ a au plus un point d'intersection avec I, d'après la question 3., $X(t_1) = X(t_2)$.
Puisque, à condition initiale fixée, la solution de $(\star)$ est unique, $X(t_1+t) = X(t_2+t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc X est périodique de période $t_2 - t_1$.

5. L'image d'une fonction périodique continue à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est toujours un fermé de $\mathbb{R}^2$

(car son image est en particulier l'image du compact $[0;T]$ où T est la période de la fonction). Puisqu'on a vu à la question 4.b) que X était périodique, $X(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$, donc aussi dans $\omega(x)$.
Montrons maintenant que $X(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\omega(x)$. Pour cela, on fixe $t \in \mathbb{R}$ et on montre qu'il existe un voisinage de $X(t)$ qui n'a pas d'intersection avec $\omega(x) - X(\mathbb{R})$.
Soit I une section transverse passant par $X(t)$ et $V \subset U$ un voisinage de $X(t)$ comme dans la question 2.
Supposons qu'il existe un point $z \in V \cap (\omega(x) - X(\mathbb{R}))$. Soit Y la solution maximale de $(\star)$ pour la condition initiale $Y(0) = z$. D'après la question 4. appliquée à z au lieu de y, Y est une fonction périodique dont l'image est incluse dans $\omega(x)$.
Si on considère un intervalle maximal S sur lequel Y prend ses valeurs dans V, on a, d'après la propriété (3) de la question 2., que S est de la forme $]t_0 - \epsilon_2; t_0 + \epsilon_2[$ et que $\psi(Y(t_0)) = (a, 0)$ pour un certain a, ce qui implique que $Y(t_0) \in I$.
Donc l'image de Y intersecte I. Le point d'intersection entre Y et I n'est pas $X(t)$ sinon Y et X seraient égales (à décalage près) et z appartiendrait à $X(\mathbb{R})$. Donc $\omega(x)$ intersecte I en au moins deux points, $X(t)$ et $Y(t_0)$. D'après la question 3., c'est absurde.
Donc $V \cap (\omega(x) - X(\mathbb{R})) = \emptyset$.

On a montré que $X(\mathbb{R})$ était un ouvert et un fermé de $\omega(x)$. Puisque, d'après la question 1.b), $\omega(x)$ est connexe, $\omega(x) = X(\mathbb{R})$.

Exercice 4
Soit $U = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } f \text{ est polynomiale sur un voisinage de } x\}$.

Lemme 4.1. *Si I est une composante connexe de U, alors f est polynomiale sur I.*

Démonstration. Soit $x_0 \in I$ quelconque. Soit P un polynôme qui coïncide avec f sur un voisinage de x_0. Notons $\Omega = \{x \in I \text{ tq } f \equiv P \text{ sur un voisinage de } x\}$.
L'ensemble Ω est ouvert. Montrons qu'il est également fermé. Par connexité de I, on aura alors $\Omega = I$ donc $f \equiv P$ sur I.
Soit a appartenant à l'adhérence de Ω dans I. Puisque $a \in U$, il existe un polynôme Q qui coïncide avec f sur un voisinage de a. Ce voisinage de a est d'intersection non-vide avec Ω donc, puisque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$, le voisinage de a contient un nombre infini de points de Ω.
Donc Q et P sont deux polynômes égaux en un nombre infini de points. Alors $Q = P$ et $a \in \Omega$. $\square$

Lemme 4.2. *$\mathbb{R} - U$ n'a pas de point isolé.*

Démonstration. Soit par l'absurde $x_0 \in \mathbb{R} - U$ un point isolé et $\epsilon > 0$ tel que $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[\cap (\mathbb{R} - U) = \{x_0\}$.
Notons $E_1 =]x_0 - \epsilon; x_0[$ et $E_2 =]x_0; x_0 + \epsilon[$. Ce sont deux ensembles connexes inclus dans U. D'après la question précédente, la fonction f est donc polynomiale sur E_1 et polynomiale sur E_2.
Notons P_1 et P_2 les polynômes qui coïncident avec f respectivement sur E_1 et E_2. Puisque $f - P_1$ est identiquement nulle sur E_1 et de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f - P_1$ et toutes ses dérivées sont nulles en x_0.

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 = f^{(k)}(x_0) - P_1^{(k)}(x_0) = \lim_{y \to x_0^+} f^{(k)}(y) - P_1^{(k)}(y) = P_2^{(k)}(x_0) - P_1^{(k)}(x_0)$.
Le polynôme $P_2 - P_1$ est donc nul en x_0, ainsi que toutes ses dérivées.
Un polynôme qui admet une racine de multiplicité infinie en un point est identiquement nul. Donc $P_2 = P_1$.
Donc f coïncide avec P_1 sur E_1 et E_2. Par continuité, on a aussi $f(x_0) = P_1(x_0)$. Donc f est polynomiale sur tout un voisinage de x_0. Donc $x_0 \in U$. C'est absurde. $\square$

Lemme 4.3. *$U = \mathbb{R}$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Posons $F = \mathbb{R} - U$. C'est un fermé de $\mathbb{R}$ donc un ensemble complet.
Pour tout n, on note $F_n = \{x \in F \text{ tq } f^{(n)}(x) = 0\}$. Par hypothèse, $F = \bigcup_n F_n$. Puisque les F_n sont fermés, le théorème de Baire assure que l'un d'entre eux au moins n'est pas d'intérieur vide dans F.
Soit alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in \mathring{F}_{n_0}$ et soit $\epsilon > 0$ tel que $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[\cap F \subset F_{n_0}$.
Montrons que, pour tout $x \in]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$, $f^{(n_0)}(x) = 0$.
Si $x \in]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[\cap F$, $x \in F_{n_0}$ donc $f^{(n_0)}(x) = 0$.
Sinon, $x \in U$. Soit $]a; b[$ la composante connexe de U qui contient x. Puisque $]a; b[$ est d'intersection non-vide avec $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$ mais ne contient pas tout $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$, a ou b appartient à $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$. Supposons que $a \in]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$ (le raisonnement serait identique si c'était b qui appartennait à $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$).
Puisque $a \notin U$, $a \in F$ donc il existe (par le lemme précédent) une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F tous distincts, qui converge vers a. Pour tout n assez grand, $a_n \in]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[\cap F \subset F_{n_0}$.
Pour tout $k \geq n_0$, $f^{(k)}(a) = 0$. En effet, sinon, il existe $l \geq 0, \alpha \neq 0$ tels que $f^{(n_0)}(a + t) = \alpha t^l + o(t^l)$ pour $t \to 0$ (d'après Taylor-Young, puisque la fonction $f^{(n_0)}$ est $\mathcal{C}^\infty$).
On doit donc avoir, pour tout n assez grand, $0 = f^{(n_0)}(a_n) = \alpha(a_n - a)^l + o((a_n - a)^l)$. C'est impossible.
Puisque f est polynomiale sur $]a; b[$ (d'après le premier lemme) et puisque $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \geq n_0$, f est un polynôme de degré strictement inférieur à n_0 sur $]a; b[$. Donc $f^{(n_0)} \equiv 0$ sur $]a; b[$. En particulier, $f^{(n_0)}(x) = 0$.
On a donc démontré que $f^{(n_0)} \equiv 0$ sur $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$. Donc f est polynomiale sur cet intervalle, de degré strictement inférieur à n_0. Donc $x_0 \in U$ et $x_0 \notin F$. C'est absurde. $\square$

D'après le troisième lemme, $\mathbb{R}$ est une composante connexe de U. D'après le premier lemme, f est donc polynomiale sur $\mathbb{R}$.