Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$1

Corrigé

Exercice 1

1. a) L'ensemble $E = \{y \in X \text{ tq } d(x,y) \leq \epsilon\}$ est fermé. En effet, si $x \notin E$, alors, pour tout $\eta \in]0; d(x,y) - \epsilon[$, $B(y,\eta) \cap E = \emptyset$ (car $(d(z,y) < \eta) \Rightarrow (d(x,y) \geq d(x,y) - d(y,z) > \epsilon)$). L'ensemble $X - E$ est donc ouvert.
De plus, l'ensemble E contient $B(x,\epsilon)$. Par définition, $\overline{B(x,\epsilon)}$ est le plus petit fermé contenant $B(x,\epsilon)$. Il est donc inclus dans $\{y \in X \text{ tq } d(x,y) \leq \epsilon\}$.

b) Puisque les fermés sont les complémentaires des ouverts, il suffit de montrer que tous les sous-ensembles de X sont ouverts.
Soit $U \subset X$ quelconque. Soit $x \in U$ quelconque et montrons qu'il existe $\eta > 0$ tel que $B(x,\eta) \subset U$.
Prenons $\eta = 1$; $B(x,\eta) = \{x\}$. Puisque $x \in U$, $B(x,\eta) \subset U$.

c) D'après la question précédente, $B(x,1)$ est un fermé de X. Donc :

$$\overline{B(x,1)} = B(x,1) = \{x\}$$

En revanche, $\{y \in X \text{ tq } d(x,y) \leq 1\} = X$ et, si X a au moins deux éléments, $\{x\} \neq X$.

2. a) Soit U un ouvert pour d_1. Montrons que c'est aussi un ouvert pour d_2.
Soit $x \in U$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $\{x' \text{ tq } d_1(x',x) < \epsilon\} \subset U$. Alors :

$$\begin{aligned}\{x' \text{ tq } d_2(x',x) < c_1\epsilon\} &\subset \{x' \text{ tq } c_1 d_1(x',x) < c_1\epsilon\} \\ &= \{x' \text{ tq } d_1(x',x) < \epsilon\} \subset U\end{aligned}$$

Donc U est ouvert pour d_2. De même, si U est ouvert pour d_2, il est ouvert pour d_1.

b) Soit (X,d) un espace métrique quelconque tel que d n'est pas bornée sur $X \times X$ (par exemple $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne).
La fonction $\sqrt{d}$ est également une distance : elle est symétrique et séparante car d l'est. De plus, elle vérifie l'inégalité triangulaire : $\sqrt{d(x,z)} \leq \sqrt{d(x,y) + d(y,z)} \leq \sqrt{d(x,y)} + \sqrt{d(y,z)}$.
Les boules ouvertes sont les mêmes pour les distances d et $\sqrt{d}$ donc les topologies qu'elles engendrent sont les mêmes.
Pourtant, ces distances ne sont pas équivalentes. En effet, sinon, il existerait $c_1, c_2 > 0$ tels que, pour tous x, y distincts :

$$\begin{aligned} c_1 d(x,y) \leq \sqrt{d(x,y)} \leq c_2 d(x,y) \\ \Rightarrow \qquad \frac{1}{c_2^2} \leq d(x,y) \leq \frac{1}{c_1^2} \end{aligned}$$

Cela impliquerait que d serait une distance bornée, ce qui n'est pas le cas.

Autre solution (plus longue) : soit d la distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bijective (de réciproque continue), on peut vérifier que la fonction $d_\phi(x, y) = d(\phi(x), \phi(y))$ est une distance et qu'elle engendre la même topologie que d. Pourtant, d et d_ϕ ne sont pas nécessairement équivalentes (en fait, elles ne le sont que si ϕ et ϕ^{-1} sont lipschitziennes).

3. Cette topologie est nécessairement la topologie discrète. Démontrons-le.
On veut montrer que, pour tout $x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{T}$. Cela impliquera que, pour tout $E \subset X$, puisque $E = \bigcup_{x \in X} \{x\}$, E appartient à $\mathcal{T}$ (puisqu'une union d'ouverts est un ouvert).
Soit $x \in X$ quelconque.
Soit n le plus petit entier tel qu'il existe un ouvert $U \in \mathcal{T}$ contenant x et de cardinal n. Cet entier est bien défini car il existe au moins un ouvert fini contenant x : X.
Nous allons montrer que $n = 1$. Le seul ensemble de cardinal 1 contenant x étant $\{x\}$, cela impliquera $\{x\} \in \mathcal{T}$.
Supposons par l'absurde que $n \geq 2$. Soit $U \in \mathcal{T}$ de cardinal n contenant x. Soit $y \in U - \{x\}$. Puisque la topologie est séparée, il existe $V \in \mathcal{T}$ un ouvert tel que $x \in V$ mais $y \notin V$.
L'ensemble $U \cap V$ est l'intersection de deux ouverts donc aussi un ouvert. Il contient x (car U et V contiennent x) mais pas y. Il est donc inclus dans U mais pas égal à U. Son cardinal est donc strictement inférieur à n, ce qui est en contradiction avec la définition de n.

4. C'est possible. Si $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$, c'est clair. Supposons donc que X et Y sont non-vides et fixons $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. On pose :

$$\begin{aligned}
D(z, z') &= d(z, z') \quad \text{si } z, z' \in X \\
&= \delta(z, z') \quad \text{si } z, z' \in Y \\
&= d(z, x_0) + \delta(y_0, z') + 1 \quad \text{si } z \in X, z' \in Y \\
&= d(z', x_0) + \delta(y_0, z) + 1 \quad \text{si } z \in Y, z' \in X
\end{aligned}$$

Restreinte à $X \times X$, cette fonction vaut d et, restreinte à $Y \times Y$, elle vaut δ.
Montrons que D est une distance.
La fonction D est symétrique. Elle est également séparante (car d et δ le sont).
Montrons l'inégalité triangulaire : $D(z, z'') \leq D(z, z') + D(z', z'')$?
Il faudrait normalement différencier huit cas, selon l'appartenance de z, z', z'' aux ensembles X ou Y. Les cas $z, z', z'' \in X$ ou $z, z', z'' \in Y$ découlent du fait que d et δ vérifient l'inégalité triangulaire.
On va traiter deux autres cas. Les quatre cas restants se démontrent de la même façon que l'un de ces deux-là.
– $z, z' \in X, z'' \in Y$:

$$\begin{aligned}
D(z, z'') &= d(z, x_0) + \delta(y_0, z'') + 1 \\
&\leq d(z, z') + d(z', x_0) + \delta(y_0, z'') + 1 \\
&= D(z, z') + D(z', z'')
\end{aligned}$$

– $z, z'' \in X, z' \in Y$:

$$\begin{aligned}D(z,z'') &= d(z,z'') \\ &\leq d(z,x_0) + d(x_0,z'') \\ &\leq d(z,x_0) + \delta(y_0,z') + 1 + d(x_0,z'') + \delta(y_0,z') + 1 \\ &= D(z,z') + D(z',z'')\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Pour $p = 1$, $l^1 = \left\{ (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| < +\infty \right\}$ et $||u||_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$.

Montrons d'abord que l^1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

– l^1 est stable par multiplication par un scalaire : si $\sum_k |u_k| < +\infty$, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\sum_k |\lambda u_k| = |\lambda| \left(\sum_k |u_k| \right) < +\infty$ donc $(u \in l^1) \Rightarrow (\lambda u \in l^1)$.

– l^1 est stable par addition : si $\sum_k |u_k| < +\infty$ et $\sum_k |v_k| < +\infty$, alors, par inégalité triangulaire :

$$\sum_k |u_k + v_k| \leq \sum_k |u_k| + \sum_k |v_k| < +\infty$$

donc $(u, v \in l^1) \Rightarrow ((u+v) \in l^1)$

Montrons maintenant que $||.||_1$ est une norme :

– Homogénéité : $||\lambda u||_1 = \sum_k |\lambda u_k| = \sum_k |\lambda| |u_k| = |\lambda| \, ||u||_1$

– Séparation : pour tout k, $0 \leq |u_k| \leq ||u||_1$ donc, si $||u||_1 = 0$, $|u_k| = 0 \, \forall k$, ce qui implique $u_k = 0 \, \forall k$.

– Inégalité triangulaire : $||u+v||_1 = \sum_k |u_k + v_k| \leq \sum_k (|u_k| + |v_k|) = ||u||_1 + ||v||_1$.

2. a) Puisque $a, b > 0$, il suffit de montrer que $\log(ab) \leq \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$.

La fonction log est concave. Puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, cela implique :

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) &\geq \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q) \\ &= \log(a) + \log(b) = \log(ab)\end{aligned}$$

b) Quitte à multiplier u et v par des constantes positives non-nulles, on peut supposer que $||u||_p = ||v||_q = 1$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_k |u_k v_k| &\leq \sum_k \left(\frac{|u_k|^p}{p} + \frac{|v_k|^q}{q} \right) \\ &= \frac{||u||_p^p}{p} + \frac{||v||_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1 = ||u||_p ||v||_q\end{aligned}$$

c) Soit $q = \frac{p}{p-1}$. Puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\begin{aligned}
||u+v||_p^p &= \sum_k |u_k + v_k|^p \\
&\leq \sum_k (|u_k| + |v_k|)|u_k + v_k|^{p-1} \\
&= \sum_k |u_k||u_k + v_k|^{p-1} + \sum_k |v_k||u_k + v_k|^{p-1} \\
&\leq ||u||_p || \, |u+v|^{p-1}||_q + ||v||_p || \, |u+v|^{p-1}||_q
\end{aligned}$$

Or $||(u+v)^{p-1}||_q = \left(\sum_k |u_k + v_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \left(\sum_k |u_k + v_k|^p\right)^{(p-1)/p} = ||u+v||_p^{p-1}$. On a donc démontré $||u+v||_p^p \leq (||u||_p + ||v||_p)||u+v||_p^{p-1}$. Cela implique $||u+v||_p \leq ||u||_p + ||v||_p$ lorsque $||u+v||_p < +\infty$.

Concluons. L'espace l^p est stable par multiplication par un scalaire (même justification qu'en 1.). Montrons qu'il est stable par addition.

Soient $u, v \in l^p$. Notons, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $u^{(N)}$ la suite telle que :

$$\begin{aligned}
u_k^{(N)} &= u_k \text{ si } k \leq N \\
&= 0 \text{ si } k > N
\end{aligned}$$

On définit $v^{(N)}$ de la même manière.

Pour tout N, $||u^{(N)} + v^{(N)}||_p \leq ||u^{(N)}||_p + ||v^{(N)}||_p$ (d'après ce que l'on vient de démontrer, puisque $||u^{(N)} + v^{(N)}||_p < +\infty$). Donc $||u^{(N)} + v^{(N)}||_p \leq ||u||_p + ||v||_p$. Si on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient $||u+v||_p < +\infty$ donc $u + v \in l^p$.

La fonction $||.||_p$ est homogène et vérifie la séparation (même justification qu'en 1.). On vient de démontrer l'inégalité triangulaire. C'est donc une norme.

Exercice 3

1. Notons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1(M) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n(M) \end{pmatrix}$. Soit $G \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = GDG^{-1}$.

Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ quelconque. Posons $V = G^{-1}U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $k \leq n$:

$$\begin{aligned}
(U^{-1}MU)_{k,k} &= ((G^{-1}U)^{-1}D(G^{-1}U))_{k,k} \\
&= ({}^tVDV)_{k,k} \\
&= \sum_{i=1}^n V_{ik}^2 \lambda_i(M)
\end{aligned}$$

La fonction $x \to |x|^p$ est convexe. De plus, pour tout $k \leq n$, $\sum_i V_{ik}^2 = 1$ (car V est orthogonale).

Donc :

$$|(U^{-1}MU)_{k,k}|^p = \left(\sum_{i=1}^n V_{ik}^2 \lambda_i(M)\right)^p \leq \sum_{i=1}^n V_{ik}^2 |\lambda_i(M)|^p$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left|(U^{-1}MU)_{k,k}\right|^p &\leq \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}V_{ik}^2|\lambda_i(M)|^p\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i(M)|^p.\left(\sum_{k=1}^{n}V_{ik}^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i(M)|^p = N_p(M)^p\end{aligned}$$

Pour toute $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a donc $||\text{diag}(U^{-1}MU)||_p^p \leq N_p(M)^p$, ce qui implique :

$$\sup_{U\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}||\text{diag}(U^{-1}MU)||_p \leq N_p(M)$$

De plus, pour $U = G$, on a $U^{-1}MU = D$ et $||\text{diag}(U^{-1}MU)||_p = ||(\lambda_1(M), ..., \lambda_n(M))||_p = N_p(M)$. Donc $\sup\limits_{U\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}||\text{diag}(U^{-1}MU)||_p = N_p(M)$.

2. L'homogénéité découle du fait que les valeurs propres de μM sont $\mu\lambda_1(M), ..., \mu\lambda_n(M)$.
La séparation est vraie car, si $N_p(M) = 0$, M a toutes ses valeurs propres nulles donc est nulle.
Montrons l'inégalité triangulaire. Soient $M_1, M_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}N_p(M_1+M_2) &= \sup_{U\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}||\text{diag}(U^{-1}(M_1+M_2)U)||_p\\ &= \sup_{U\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}||\text{diag}(U^{-1}M_1U)+\text{diag}(U^{-1}M_2U)||_p\\ &\leq \sup_{U\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}\big(||\text{diag}(U^{-1}M_1U)||_p + ||\text{diag}(U^{-1}M_2U)||_p\big)\\ &\leq \sup_{U\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}||\text{diag}(U^{-1}M_1U)||_p + \sup_{U\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}||\text{diag}(U^{-1}M_2U)||_p\\ &= N_p(M_1)+N_p(M_2)\end{aligned}$$

Exercice 4

1. Commençons par vérifier que δ est bien définie. Il faut montrer que, pour tous $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, $\phi_{K_1} - \phi_{K_2}$ est une fonction bornée. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, les fonctions $y \in K_1 \to d(x,y)$ et $y \in K_2 \to d(x,y)$ sont continues et définies sur des compacts. Elles atteignent donc leur minimum : il existe $y_1 \in K_1$ et $y_2 \in K_2$ tels que $\phi_{K_1}(x) = d(x,y_1)$ et $\phi_{K_2}(x) = d(x,y_2)$. Alors $|\phi_{K_1}(x) - \phi_{K_2}(x)| = |d(x,y_1) - d(x,y_2)| \leq d(y_1,y_2) \leq \min\limits_{(z_1,z_2)\in K_1\times K_2} d(z_1,z_2)$. Cette majoration étant valable pour tout x, $\phi_{K_1} - \phi_{K_2}$ est bornée.
Montrons que δ est une norme.
– Symétrie : $\delta(K_1,K_2) = ||\phi_{K_1} - \phi_{K_2}||_\infty = || - (\phi_{K_1} - \phi_{K_2})||_\infty = \delta(K_2,K_1)$
– Séparation : si $\delta(K_1,K_2) = 0$, alors $\phi_{K_1} = \phi_{K_2}$.
  En particulier, pour tout $x \in K_1$, $\inf\limits_{y\in K_2} d(x,y) = \phi_{K_2}(x) = \phi_{K_1}(x) = 0$.

Comme K_2 est compact et comme la fonction $y \in K_2 \to d(x,y)$ est continue, elle atteint sa borne inférieure. Il existe donc $y \in K_2$ tel que $d(x,y) = 0$. Pour ce y, on doit avoir $y = x$ donc $x \in K_2$.
On a ainsi démontré $K_1 \subset K_2$. De la même façon, $K_2 \subset K_1$ donc $K_1 = K_2$.

– Inégalité triangulaire : $\delta(K_1, K_3) = ||\phi_{K_1} - \phi_{K_3}||_\infty \leq ||\phi_{K_1} - \phi_{K_2}||_\infty + ||\phi_{K_2} - \phi_{K_3}||_\infty = \delta(K_1, K_2) + \delta(K_2, K_3)$

La fonction δ n'est plus une norme si on la définit sur l'ensemble des parties non-vides de $\mathbb{R}^n$. En fait, elle n'est même plus définie : par exemple, pour $K_1 = \{0\}$ et $K_2 = \mathbb{R}^n$, $\phi_{K_1} - \phi_{K_2}$ n'est pas bornée.

2. Sens direct : supposons $\delta(K_1, K_2) \leq \epsilon$.
Si $x \in K_1$, $\phi_{K_1}(x) = 0$. Puisque $||\phi_{K_1} - \phi_{K_2}||_\infty \leq \epsilon$, on doit avoir $\phi_{K_2}(x) \leq \epsilon$. Puisque K_2 est compact et que la fonction $y \in K_2 \to d(x,y)$ est continue, cette fonction atteint sa borne inférieure. Il existe donc $y \in K_2$ tel que $d(x,y) = \phi_{K_2}(x) \leq \epsilon$. Alors $x \in \overline{B(y,\epsilon)} \subset V_\epsilon(K_2)$. Donc $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$.
De même, $K_2 \subset V_\epsilon(K_1)$.

Sens indirect : supposons $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$ et $K_2 \subset V_\epsilon(K_1)$.
Il faut montrer que $||\phi_{K_1} - \phi_{K_2}||_\infty \leq \epsilon$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque.
De même que précédemment, il existe $y_1 \in K_1$ tel que $d(x,y_1) = \phi_{K_1}(x)$.
Puisque $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$, il existe $y_2 \in K_2$ tel que $y_1 \in \overline{B(y_2,\epsilon)}$. Alors $d(x,y_2) \leq d(x,y_1) + d(y_1,y_2) \leq d(x,y_1) + \epsilon$. Donc $\phi_{K_2}(x) \leq d(x,y_2) \leq d(x,y_1) + \epsilon = \phi_{K_1}(x) + \epsilon$.
De même, $\phi_{K_1}(x) \leq \phi_{K_2}(x) + \epsilon$. Donc $|\phi_{K_1}(x) - \phi_{K_2}(x)| \leq \epsilon$.

3. Soient $K \in \mathcal{K}$ et $\epsilon > 0$ quelconques. On va montrer qu'il existe $K_0 \in \mathcal{K}_0$ tel que $\delta(K, K_0) \leq \epsilon$.
Puisque K est compact, il existe $K_0 = \{x_s\}_{1 \leq s \leq S}$ une famille finie de points de K tels que $K \subset \bigcup_s \overline{B(x_s,\epsilon)}$.
Pour ce K_0, on a $K \subset V_\epsilon(K_0)$, par définition, et $K_0 \subset K \subset V_\epsilon(K)$. D'après la question précédente, cela implique $\delta(K, K_0) \leq \epsilon$.

Exercice 5

1. Vu la définition, d est symétrique. La séparation est vérifiée : si $d(x,y) = 0$, on doit avoir soit $||x - y|| = 0$, ce qui implique $x = y$, soit $||x|| = ||y|| = 0$, ce qui implique $x = y = 0$.
Montrons l'inégalité triangulaire. Remarquons pour cela que $d(x,y) \geq ||x-y||$, quels que soient $x, y \in \mathbb{R}^2$ (puisque $||x|| + ||y|| \geq ||x - y||$, par inégalité triangulaire).
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^2$.
- Cas 1 : x, z et 0 sont alignés. Alors $d(x,z) = ||x - z|| \leq ||x - y|| + ||y - z|| \leq d(x,y) + d(y,z)$.
- Cas 2 : x, z et 0 ne sont pas alignés, $y = 0$. Alors $d(x,y) = ||x||$ et $d(z,y) = ||z||$. Donc $d(x,z) = ||x|| + ||z|| = d(x,y) + d(y,z)$.
- Cas 3 : x, z et 0 ne sont pas alignés, $y \neq 0$. Alors x, y et 0 ne sont pas alignés ou bien z, y et 0 ne sont pas alignés. Supposons que x, y et 0 ne sont pas alignés. Alors $d(x,z) = ||x|| + ||z|| \leq ||x|| + ||y|| + ||z - y|| = d(x,y) + ||z - y|| \leq d(x,y) + d(y,z)$.

2. Si $r \leq ||x||$, il est impossible d'avoir $||x|| + ||y|| < r$. Les éléments de $B_d(x,r)$ sont donc exactement les points y de la droite $(0x)$ tels que $||x - y|| < r$. Géométriquement, $B_d(x,r)$ est le segment de longueur $2r$, centré en x, inclus dans $(0x)$.

Si $r > ||x||$, la boule est l'union de ce segment et de la boule de centre 0 et de rayon $r - ||x||$.

3. D'après la question précédente, tous les ouverts pour d ne sont pas des ouverts pour la topologie usuelle (en particulier, un segment non-vide n'est jamais ouvert pour la topologie usuelle).

En revanche, les ouverts pour la topologie usuelle sont des ouverts pour d : pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$, $d(x, y) \geq ||x - y||$ donc, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$, $B_d(x, \epsilon) \subset B_{||.||}(x, \epsilon)$.

Si U est un ouvert pour la norme euclidienne et $x \in U$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $B_{||.||}(x, \epsilon) \subset U$. D'après ce qu'on vient de dire, on a alors $B_d(x, \epsilon) \subset U$. Comme c'est vrai pour tout x, U est aussi un ouvert pour d.

La topologie induite par d contient plus d'ouverts que la topologie usuelle. Elle est donc plus fine.

4. Deux points du cercle unité ne sont jamais alignés, sauf s'ils sont égaux. Lorsque x, y appartiennent au cercle unité, on a donc :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ \|x\| + \|y\| = 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Restreinte au cercle unité, d est la distance discrète (multipliée par 2).

5. Soit s une similitude continue pour d.

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par 0. Nous allons montrer par l'absurde que son image par s (qui est une droite puisque s est une similitude) passe par 0.

Si ce n'est pas le cas, pour tous $x, y \in \mathcal{D}$ tels que $x \neq y$, $s(x)$ et $s(y)$ ne sont pas alignés avec 0 donc :

$$d(s(x), s(y)) = ||s(x)|| + ||s(y)||$$

En particulier, si $y \to x$ en restant sur la droite $(0x)$, $d(x, y) \to 0$ mais $d(s(x), s(y)) \to 2||s(x)|| > 0$. C'est absurde, puisque s est continue pour d.

L'image par s d'une droite passant par 0 est donc une droite passant par 0. La similitude s laisse donc le point 0 fixe. C'est la composition d'une rotation et d'une homothétie.

Réciproquement, comme les rotations et les homothéties sont continues pour d, les composées d'une rotation et d'une homothétie sont continues pour d.

6. Sur $\mathbb{R}^2$, toutes les normes sont équivalentes. Elles engendrent donc la même topologie que $||.||$, dont on a vu à la question 3. que ce n'était pas la même que celle engendrée par d. L'espace $(\mathbb{R}^2, d)$ n'est donc pas normable.

Exercice 6

1. a) Soit $x \in X$ fixé. Il faut montrer que f_x est bornée. On va montrer que, pour tout A, $|f_x(A)| \leq d(x, a)$. En effet :

$$\begin{aligned} f_x(A) &= d(x, A) - d(a, A) \\ &= \inf_{\alpha \in A} d(x, \alpha) - d(a, A) \\ &\leq \inf_{\alpha \in A} (d(x, a) + d(a, \alpha)) - d(a, A) \\ &= d(x, a) + d(a, A) - d(a, A) = d(x, a) \end{aligned}$$

De même, $-f_x(A) \leq d(x,a)$.

b) On note $||.||_\infty$ la norme uniforme.

Soient $x, y \in X$. Montrons que $||f_x - f_y||_\infty = d(x,y)$.

Pour tout $A \in \mathcal{F}$, $(f_x - f_y)(A) = d(x,A) - d(y,A)$. La même démonstration qu'à la question a) montre que $||f_x - f_y||_\infty \leq d(x,y)$.

De plus, $|(f_x - f_y)(\{y\})| = |d(x,\{y\}) - d(y,\{y\})| = |d(x,y) - 0| = d(x,y)$. On a donc aussi $||f_x - f_y||_\infty \geq d(x,y)$.

c) $\{f_x\}_{x\in X}$ n'est pas nécessairement un fermé de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$. On va donc choisir pour V un sous-espace vectoriel strict de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$, dans lequel $\{f_x\}_{x\in X}$ sera fermé.

Posons $V = \operatorname{Vect}\{f_x\}_{x\in X-\{a\}}$ (c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires finies de f_x). Notons $F = \{f_x\}_{x\in X}$. D'après la question b), $x \in X \to f_x \in F$ est une isométrie. Pour conclure, il suffit de démontrer que F est un fermé de V.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X telle que $(f_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans V vers une limite g. Nous allons montrer que $g \in F$. Puisque g appartient à V, il existe $y_1, ..., y_s$ des éléments distincts de $X - \{a\}$ et $t_1, ..., t_s$ des réels tels que $g = \sum\limits_{k=1}^{s} t_k f_{y_k}$.

Si la suite $(f_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang, g est égale à cette constante donc appartient à F. On peut donc supposer que $(f_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire. Quitte à extraire, on peut alors supposer que $x_n \neq a$ pour tout n.

Prenons $A = \{y_k\}_{1\leq k\leq s} \cup \{a\}$. Puisque $f_{x_n} \to g$, $(g - f_{x_n})(A) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour tout $k \leq s$, $f_{y_k}(A) = 0$ donc :

$$(g - f_{x_n})(A) = -f_{x_n}(A) = -d(x_n, A)$$

Comme A est fini et $d(x_n, A) \to 0$ quand $n \to +\infty$, il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers un élément de A, qu'on note b. Quitte à extraire, on peut supposer que c'est toute la suite (x_n) qui converge vers b.

Alors $f_{x_n} \to f_b$, puisque $||f_{x_n} - f_b||_\infty = d(x_n, b) \to 0$. Donc, puisque la limite est uniquement définie, $g = f_b$ et $g \in F$.

2. Dans cette question, on construit de manière « plus manuelle » V, N, F vérifiant les conditions requises. Comme la construction est assez longue, je n'en donne que les grandes étapes (je ne garantis pas du tout que cette construction soit optimale ; si vous avez trouvé une méthode plus courte, n'hésitez pas à me l'envoyer).

Fixons $a \in X$. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel admettant pour base une famille $\{1_x\}_{x\in X-\{a\}}$ indexée par les éléments de $X - \{a\}$. On note :

$$1_a = 0_V \qquad e_{x,y} = 1_x - 1_y \quad \forall x, y \in X$$

Posons :

$$N(z) = \inf\Big\{ \sum_{x,y\in A} t_{x,y} d(x,y) \text{ tq } A \subset X \text{ est finie}, \sum_{x,y\in A} t_{x,y} e_{x,y} = z \text{ et les } t_{x,y} \text{ sont positifs}\Big\}$$

(Il s'agit de la fonction convexe homogène maximale telle que $N(1_x - 1_y) \leq d(x,y)$ pour tous x et y. C'est donc une bonne candidate pour être la norme voulue.)

À partir de la définition, on peut montrer que N est homogène et vérifie l'inégalité triangulaire.

Lemme 6.1.

$$N(z) = \inf\Big\{ \sum_{x\in B, y\in C} t_{x,y} d(x,y) \ \textit{tq } B, C \subset X \textit{ sont finies et disjointes,}$$
$$\sum_{x\in B, y\in C} t_{x,y} e_{x,y} = z \textit{ et les } t_{x,y} \textit{ sont positifs}\Big\}$$

Idée de démonstration. Soit z fixé.
Soit $A \subset X$ finie. Par un argument de compacité, on peut montrer que la borne inférieure de $\{ \sum_{x,y\in A} t_{x,y} d(x,y)$ tq $\sum_{x,y\in A} t_{x,y} e_{x,y} = z$ et les $t_{x,y}$ sont positifs$\}$ est atteinte.
Parmi les $\{t_{x,y}\}_{x,y}$ qui atteignent cette borne inférieure, on peut en choisir qui minimisent $\sum_{x,y\in A} t_{x,y}$.
Alors pour tous x, y, z, $t_{x,y} = 0$ ou $t_{y,z} = 0$. En effet, si ce n'est pas le cas, on choisit $\alpha > 0$ assez petit, on remplace $t_{x,y}$ par $t_{x,y} - \alpha$, $t_{y,z}$ par $t_{y,z} - \alpha$ et $t_{x,z}$ par $t_{x,z} + \alpha$. On peut vérifier que cette opération ne change pas $\sum_{x,y} t_{x,y} e_{x,y}$, ne fait pas augmenter $\sum_{x,y} t_{x,y} d(x,y)$ (à cause de l'inégalité triangulaire) mais fait strictement diminuer $\sum_{x,y} t_{x,y}$. C'est en contradiction avec la façon dont on a choisi les $t_{x,y}$.
Si on pose $B = \{x \in A \text{ tq } \exists y \in A, t_{x,y} > 0\}$ et $C = \{y \in A \text{ tq } \exists x \in A, t_{x,y} > 0\}$, ces deux ensembles sont alors disjoints et vérifient :

$$\sum_{x,y\in A} t_{x,y} d(x,y) = \sum_{x\in B, y\in C} t_{x,y} d(x,y) \qquad \sum_{x,y\in A} t_{x,y} e_{x,y} = z = \sum_{x\in B, y\in C} t_{x,y} e_{x,y}$$

Donc $\inf\{ \sum_{x,y\in A} t_{x,y} d(x,y)$ tq $\sum_{x,y\in A} t_{x,y} e_{x,y} = z$ et les $t_{x,y}$ sont positifs$\} \geq N'(z)$. En prenant la borne inférieure sur A, cela permet de montrer que $N(z) \geq N'(z)$. Il est de plus clair que $N(z) \leq N'(z)$. Donc $N = N'$. ☐

Lemme 6.2. *Soient $A \subset X - \{a\}$ fini et $z = \sum_{x\in A} \alpha_x 1_x$ avec $\alpha_x \neq 0$ pour tout x. Soient $B, C \subset X$ des ensembles finis et disjoints et soient $\{t_{x,y}\}_{x\in B, y\in C}$ des réels positifs tels que $\sum_{x\in B, y\in C} t_{x,y} e_{x,y} = z$. Alors :*
- Si $\alpha_x > 0$, alors $x \in B$ et $\sum_{y\in C} t_{x,y} = \alpha_x$.
- Si $\alpha_x < 0$, alors $x \in C$ et $-\sum_{x\in B} t_{x,y} = \alpha_y$.
- Si $x \notin A \cup \{a\}$ ou $y \notin A \cup \{a\}$, $t_{x,y} = 0$.

La démonstration se fait en exprimant les α_x en fonction des $t_{x,y}$. Du lemme 6.2, on peut déduire le lemme suivant :

Lemme 6.3. *Soient $A \subset X - \{a\}$ fini et $z = \sum_{x\in A} \alpha_x 1_x$ avec $\alpha_x \neq 0$ pour tout x.*
Alors, pour tout $x \in A$, $N(z) \geq |\alpha_x| \min_{y\in A\cup\{a\}, y\neq x} d(x,y)$.

Ce troisième lemme permet de montrer la séparation. La fonction N est donc bien une norme. À l'aide du lemme 6.2, on peut calculer $N(1_x - 1_y)$ pour tous $x, y \in X$ et on trouve $N(1_x - 1_y) = d(x, y)$. La fonction $x \in X \to 1_x \in V$ est donc bien une isométrie.
Pour conclure, il suffit de montrer que $F = \{1_x\}_{x \in X}$ est fermé. Cette démonstration ressemble à celle de la question 1.c).
Soit $(1_{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de F. On veut montrer que sa limite est dans F. On note $\sum\limits_{x \in A} \alpha_x 1_x$ cette limite, avec $A \subset X - \{a\}$ fini.
On peut supposer que $x_n \notin A$ pour tout n. Le lemme 6.3 permet de montrer que, lorsque $n \to +\infty$, $\min\limits_{y \in A \cup \{a\}} d(x_n, y) \to 0$. Quitte à extraire, on peut supposer que $x_n \to z$ pour un certain $z \in A$. On a alors $1_{x_n} \to 1_z$ donc la limite de $(1_{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est dans F.