Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$2

Exercice 1 : questions diverses

1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique tel que, pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle, f est continue. Déterminer $\mathcal{T}$.

2. Soient A et B deux parties d'un espace topologique X. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en général. Lorsqu'elles décrivent une égalité fausse, indiquez si au moins l'une des inclusions est vraie.

a) $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ c) $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$

3. Soient X et Y deux espaces topologiques. Montrer qu'une fonction $f : X \to Y$ est continue si et seulement si, pour tout ensemble $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

4. Trouver une topologie sur $\mathbb{N}$ qui n'est pas à base dénombrable d'ouverts.

Exercice 2 : topologie « de la limite supérieure » sur $\mathbb{R}$.

On munit $\mathbb{R}$ de la topologie $\mathcal{T}_{\limsup}$ engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ et $]b, +\infty[$.

1. Montrer que les intervalles $]a, b]$ (avec $a < b$) forment une base d'ouverts de cette topologie.

2. Cette topologie est-elle moins fine que la topologie usuelle ? Plus fine ?

3. Déterminer l'adhérence de $]a, b]$.

4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour cette topologie.

5. Montrer que cette topologie n'est pas métrisable.
[Indication : Montrer qu'il n'existe pas de base dénombrable d'ouverts et utiliser 4.]

Exercice 3

Soit X un ensemble indénombrable. Fixons $x_0 \in X$.
Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties U de X qui vérifient l'une des deux propriétés suivantes :

$$(1)\ x_0 \notin U \qquad \text{ou} \qquad (2)\ X - U \text{ est dénombrable}$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie.

2. Montrer que $\mathcal{T}$ est séparée.

3. Décrire l'ensemble des suites convergentes pour $\mathcal{T}$.

4. Trouver un espace topologique Y et une fonction non-continue $f : X \to Y$ vérifiant la propriété suivante :
Si $z_n \to z_\infty$ est une suite convergente d'éléments de X, alors $f(z_n) \to f(z_\infty)$ dans Y.

Exercice 4 : topologie des complémentaires de parties finies

Soit X un ensemble. On note $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des parties de X de complémentaire fini : $C \in \mathcal{C}_0$ si et seulement si $X - C$ est fini. Soit $\mathcal{C}$ la réunion de $\mathcal{C}_0$ et de l'ensemble vide.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une topologie sur X. Cette topologie est-elle séparée ?

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X telle que, pour tout $y \in X$, $\{n \text{ tq } x_n = y\}$ est fini. Montrer que, pour tout $z \in X$, $x_n \to z$.

3. Soit Y un espace topologique séparé. Décrire l'ensemble des fonctions continues $f : X \to Y$.

Exercice 5 : ensembles dérivés successifs.

Soit A une partie d'un espace topologique X. Un *point d'accumulation* de A est un point $x \in A$ qui est dans l'adhérence de $A - \{x\}$. L'ensemble des points d'accumulation de A est appelé *ensemble dérivé* de A et noté A'. L'ensemble dérivé de l'ensemble dérivé de A est noté A". Etc. Combien la suite $A,\ A'\ A'',\ A''' \ldots$ peut-elle contenir de termes deux à deux distincts ?

Exercice 6 : théorème de Cantor-Bendixson

Soit A une partie d'un espace topologique X. On dit qu'un point $x \in X$ est un *point de condensation* de A si, pour tout voisinage V de x, l'intersection $V \cap A$ est non-dénombrable. On note A^* l'ensemble des points de condensation de A.

1. Si X admet une base dénombrable d'ouverts, montrer que $A - (A^* \cap A)$ est dénombrable. En déduire que $A^* = A^{**}$.

2. En déduire le théorème de Cantor-Bendixson : tout espace topologique à base dénombrable d'ouverts s'écrit comme la réunion disjointe de deux sous-ensembles X_1 et X_2, où X_1 est fermé sans point isolé et X_2 est dénombrable.

Exercice 7 : sur la séparation

1. On dit qu'un espace topologique X est :

(0) *de Kolmogorov* (ou T_0) si, pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe un voisinage V de l'un des deux points qui ne contient pas l'autre point.

(1) *accessible* (ou T_1) si, pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe un voisinage V de x tel que $y \notin V$.

(2) *séparé* (ou T_2) si, pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe V_x un voisinage de x et V_y un voisinage de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Les implications $(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (0)$ sont vraies. Montrer que les réciproques sont fausses.

2. [Une propriété universelle]

On va montrer le théorème suivant : soit X un espace topologique. Il existe Y un espace séparé et $\pi : X \to Y$ continue telle que, pour tout espace topologique séparé et toute fonction $f : X \to Z$ continue, il existe une unique $g : Y \to Z$ continue vérifiant $f = g \circ \pi$.

a) Pour tous $x, y \in X$, on note $x\mathcal{R}y$ si, pour toute fonction $f : X \to Z$ continue à valeurs dans un espace topologique séparé Z, $f(x) = f(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) On pose $Y = X/\mathcal{R}$, muni de la topologie quotient. Montrer que Y est séparé.

c) On note $\pi : X \to Y$ la projection canonique. Démontrer le théorème.

d) Montrer que si (Y, π) et (Y', π') sont deux espaces séparés vérifiant la propriété du théorème, alors ils sont isomorphes comme espaces topologiques.