Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$2

Corrigé

Exercice 1

1. $\mathcal{T}$ est la topologie discrète. En effet, soit $U \subset X$ quelconque. Notons $f : X \to \mathbb{R}$ l'application qui vaut 0 sur U et 1 sur $X - U$. Puisqu'elle est continue, $U = f^{-1}(]-\infty; 1/2[)$ est ouvert pour $\mathcal{T}$: $U \in \mathcal{T}$.

2. a) L'ensemble $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ est le plus grand ouvert inclus dans $A \cup B$. Comme $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ est ouvert et inclus dans $A \cup B$, on a :

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$$

En revanche, on n'a pas nécessairement égalité. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, si on prend $A = [0; 1]$ et $B = [1; 2]$:

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} =]0; 2[$$
$$\text{mais } \mathring{A} \cup \mathring{B} =]0; 2[- \{1\}$$

b) L'ensemble $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cup B$. Puisque $\overline{A} \cup \overline{B}$ est fermé et contient $A \cup B$, on a :

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$$

De plus, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Comme $\overline{A \cup B}$ est un fermé contenant A, $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. De même, $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, ce qui implique :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

c) D'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\partial(A \cup B) &= \overline{A \cup B} - \left(\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}\right) \\
&= \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) - \left(\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}\right) \\
&\subset \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) - \left(\mathring{A} \cup \mathring{B}\right) \\
&= \left(\overline{A} - \left(\mathring{A} \cup \mathring{B}\right)\right) \cup \left(\overline{B} - \left(\mathring{A} \cup \mathring{B}\right)\right) \\
&\subset \left(\overline{A} - \mathring{A}\right) \cup \left(\overline{B} - \mathring{B}\right) \\
&= \partial A \cup \partial B
\end{aligned}$$

En revanche, l'autre inclusion n'est pas vraie. Le contre-exemple du a) est encore valable ici : si $A = [0;1]$ et $B = [1;2]$,

$$\begin{gathered}\partial(A \cup B) = \{0\} \cup \{2\} \\ \text{mais } \partial A \cup \partial B = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\}\end{gathered}$$

3. Supposons d'abord que f est continue. Soit $A \subset X$ quelconque. L'ensemble $\overline{f(A)}$ est fermé donc $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ est aussi fermé, puisque f est continue. Puisque cet ensemble contient A, il contient $\overline{A}$:

$$\overline{A} \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

Supposons maintenant que, pour tout $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ et montrons que f est continue.
Il faut montrer que, pour tout $F \subset X$ fermé, $f^{-1}(F)$ est aussi un fermé. Soit donc F un fermé quelconque.
Posons $A = f^{-1}(F)$. Puisque $f(A) \subset F$, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{F} = F$ donc $\overline{f^{-1}(F)} = \overline{A} \subset f^{-1}(F)$. Puisque, de plus, $f^{-1}(F) \subset \overline{f^{-1}(F)}$, l'égalité $f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)}$ est vraie et $f^{-1}(F)$ est un fermé.

4. Soit $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble de parties disjointes de $\mathbb{N}$, dont l'union est $\mathbb{N}$. (Un tel ensemble existe forcément : soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ une bijection quelconque. Si on pose $E_n = \phi^{-1}(\{n\} \times \mathbb{N})$, l'ensemble $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convient.)
On considère la topologie $\mathcal{T}$ telle que $U \subset \mathbb{N}$ est ouvert si et seulement si $U = \emptyset$ ou, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n - (U \cap E_n)$ est fini. On peut vérifier qu'il s'agit bien d'une topologie.
Montrons qu'elle n'est pas à base dénombrable d'ouverts. Soit, par l'absurde, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts, qu'on peut supposer non-vides.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, fixons $x_n \in U_n \cap E_n$. Un tel x_n existe puisque $E_n - U_n$ est fini et E_n est infini donc $E_n \cap U_n \neq \emptyset$.
Notons $V = \mathbb{N} - \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. C'est un ouvert car, pour tout n, $E_n - V = \{x_n\}$ est fini. En revanche, il ne contient aucun U_n puisque, pour tout n, $x_n \in U_n$ mais $x_n \notin V$. C'est en contradiction avec la définition d'une base d'ouverts.

Exercice 2

1. Les intervalles $]a;b]$ sont ouverts pour cette topologie car ils s'écrivent comme l'intersection de deux ouverts, $]-\infty, b]$ et $]a;+\infty[$.
Pour montrer qu'ils forment une base de la topologie, il faut montrer que tout ouvert de $\mathcal{T}_{\limsup}$ est une union d'ouverts de la forme $]a;b]$. On sait que les ouverts de $\mathcal{T}_{\limsup}$ sont les unions d'intersections finies d'ensembles de la forme $]-\infty;a]$ ou $]b;+\infty[$. Il suffit donc de montrer que toutes les intersections finies d'ensembles de la forme $]-\infty;a]$ ou $]b;+\infty[$ sont des unions d'ouverts de la forme $]a;b]$.

Soit $\left(\bigcap_{n\leq N_1}]-\infty;a_n]\right)\cap\left(\bigcap_{n\leq N_2}]b_n;+\infty[\right)$ une telle intersection. Cette intersection est égale à :

$$\begin{aligned}]\max_{n\leq N_2} b_n;\min_{n\leq N_1} a_n] \quad & \text{si } N_1,N_2>0 \\ ]-\infty;\min_{n\leq N_1} a_n] \quad & \text{si } N_1>0, N_2=0 \\ ]\max_{n\leq N_2} b_n;+\infty[\quad & \text{si } N_1=0, N_2>0 \end{aligned}$$

Dans le premier cas, cet ensemble est de la forme $]a;b]$, avec $b=\min_{n\leq N_1} a_n$ et $a=\max_{n\leq N_2} b_n$. Dans le deuxième cas :

$$]-\infty;\min_{n\leq N_1} a_n]=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k;\min_{n\leq N_1} a_n]$$

Dans le troisième cas :

$$]\max_{n\leq N_2} b_n;+\infty[=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\max_{n\leq N_2} b_n;k]$$

Dans chaque cas, l'intersection $\left(\bigcap_{n\leq N_1}]-\infty;a_n]\right)\cap\left(\bigcap_{n\leq N_2}]b_n;+\infty[\right)$ est donc bien une union d'ensembles de la forme $]b;a]$.

Solution un peu plus courte : l'ensemble $E=\{]a;b] \text{ tq } a<b\}$ est stable par intersection finie et l'union des éléments de E est égale à $\mathbb{R}$. L'ensemble E est donc une base de la topologie qu'il engendre.

Cette topologie qu'il engendre est moins fine que $\mathcal{T}_{\limsup}$ car tous les $]a;b]$ sont des ouverts pour $\mathcal{T}_{\limsup}$.

Cette topologie est aussi plus fine que $\mathcal{T}_{\limsup}$ car, pour tous a et b, $]-\infty;a]$ et $]b;+\infty[$ s'écrivent comme une union d'ensembles de la forme $]a';b']$. Ils appartiennent donc, ainsi que toutes leurs unions d'intersections finies, à la topologie engendrée par E.

La topologie engendrée par E, dont E est une base, est donc égale à $\mathcal{T}_{\limsup}$.

2. Les boules ouvertes pour la topologie usuelle sont des ouverts de $\mathcal{T}_{\limsup}$:

$$]x-\epsilon;x+\epsilon[=\bigcup_{y\in]x-\epsilon;x+\epsilon[}]x-\epsilon;y]$$

Les ouverts de la topologie usuelle appartiennent donc à $\mathcal{T}_{\limsup}$; $\mathcal{T}_{\limsup}$ est plus fine que la topologie usuelle. En revanche, elle n'est pas moins fine : les $]a;b]$ sont ouverts pour $\mathcal{T}_{\limsup}$ mais pas pour la topologie usuelle.

3. Le complémentaire de $]a;b]$ vaut $\mathbb{R}-]a;b]=]-\infty;a]\cup]b;+\infty[$. C'est donc un ouvert. Donc $]a;b]$ est un fermé ; il est sa propre adhérence.

4. Tout ouvert non-vide de $\mathcal{T}_{\limsup}$ contient un invervalle non-vide de la forme $]a;b]$, qui contient nécessairement un élément de $\mathbb{Q}$, car $\mathbb{Q}$ est dense pour la topologie usuelle.

5. Montrons d'abord que $\mathcal{T}_{\limsup}$ n'est pas à base dénombrable d'ouverts. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle est à base dénombrable d'ouverts. Soit $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts. Notons $E=\{\sup U_n \text{ tq } n\in\mathbb{N}\}$ (où sup désigne la borne supérieure standard sur $\mathbb{R}$). L'ensemble E est dénombrable.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $]-\infty; a]$ est un ouvert de $\mathcal{T}_{\limsup}$ donc une union d'éléments de la base $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n \subset]-\infty; a]$ et $a \in U_n$. Pour un tel n, $a = \sup U_n$. Donc $a \in E$.
On a ainsi démontré $\mathbb{R} \subset E$, ce qui est impossible car E est dénombrable. Donc $\mathcal{T}_{\limsup}$ n'est pas à base dénombrable d'ouverts.
Supposons maintenant par l'absurde que $\mathcal{T}_{\limsup}$ est métrisable. Soit d une distance sur $\mathbb{R}$ engendrant $\mathcal{T}_{\limsup}$. Alors $\mathcal{B} = \{B_d(x, 1/n) \text{ tq } x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base dénombrable d'ouverts pour $\mathcal{T}_{\limsup}$.
En effet, il est clair qu'il s'agit d'un ensemble dénombrable d'ouverts. Montrons que c'est une base de $\mathcal{T}_{\limsup}$.
Soit $U \in \mathcal{T}_{\limsup}$ un ouvert quelconque. Soit $z \in U$. Puisque U est ouvert pour la distance d, il existe $n_z \in \mathbb{N}^*$ tel que $B_d(z, 1/n_z) \subset U$. D'après la question précédente, il existe $x_z \in \mathbb{Q} \cap B_d(z, 1/2n_z)$. Alors $z \in B_d(x_z, 1/2n_z)$ et $B_d(x_z, 1/2n_z) \subset B_d(z, 1/n_z) \subset U$.
Les ouverts $B_d(x_z, 1/2n_z)$ appartiennent à $\mathcal{B}$ et $U = \bigcup_{z\in U} B_d(x_z, 1/2n_z)$.
Donc $\mathcal{B}$ est une base dénombrable d'ouverts.

Exercice 3

1. Elle contient l'ensemble vide (qui vérifie (1)) et l'ensemble X (qui vérifie (2)).

Montrons qu'elle est stable par intersection de deux éléments (cela impliquera qu'elle est stable par intersection finie). Soient $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ quelconques.
Premier cas : U_1 ou U_2 vérifie (1). Alors $U_1 \cap U_2$ vérifie (1) donc $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.
Deuxième cas : U_1 et U_2 vérifient (2). Alors $X - (U_1 \cap U_2) = (X - U_1) \cup (X - U_2)$ est une union d'ensembles dénombrables, donc un ensemble dénombrable. Donc $U_1 \cap U_2$ vérifie (2) et $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Montrons qu'elle est stable par union. Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un ensemble d'éléments de $\mathcal{T}$.
Premier cas : tous les U_i vérifient (1). Alors $\bigcup_{i\in I} U_i$ vérifie (1), donc appartient à $\mathcal{T}$.
Deuxième cas : il existe $j \in I$ tel que U_j vérifie (2). Alors $X - \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \subset X - U_j$ donc est dénombrable, c'est-à-dire vérifie (2). Donc $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

2. Soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Montrons qu'il existe deux ouverts disjoints dont l'un contient x et l'autre y.
L'un des deux points x ou y au moins est différent de x_0. On peut supposer $x \neq x_0$.
L'ensemble $\{x\}$ est ouvert pour $\mathcal{T}$ car il vérifie (1) ; il contient x. L'ensemble $X - \{x\}$ est ouvert car il vérifie (2) ; il contient de plus y. Les ensembles $\{x\}$ et $X - \{x\}$ sont disjoints.

3. Les suites convergentes sont exactement les suites stationnaires. En effet, les suites stationnaires sont convergentes (c'est le cas dans tout espace topologique). Montrons la réciproque.
Soit $z_n \to z_\infty$ une suite convergente d'éléments de X. On va montrer qu'elle stationne.
Premier cas : $z_\infty \neq x_0$. Alors $\{z_\infty\} \in \mathcal{T}$. À partir d'un certain rang, la suite (z_n) doit donc être incluse dans $\{z_\infty\}$, ce qui signifie qu'elle est constante en z_∞.
Deuxième cas : $z_\infty = x_0$. Soit $U = X - \{z_n \text{ tq } z_n \neq x_0\}$. Cet ensemble vérifie (2) donc est ouvert pour $\mathcal{T}$. À partir d'un certain rang, la suite (z_n) doit donc être incluse dans U. Or $z_n \notin U$ si $z_n \neq x_0$. Donc, à partir d'un certain rang, $z_n = x_0$.

4. Soit Y égal à l'ensemble X, mais muni cette fois de la topologie discrète. Les suites convergentes pour la topologie discrète sont les suites stationnaires, c'est-à-dire les mêmes que pour la topologie $\mathcal{T}$.
L'application identité $\mathrm{Id} : X \to Y$ respecte donc les suites convergentes.
En revanche, cette application n'est pas continue car $\{x_0\} = \mathrm{Id}^{-1}(\{x_0\})$ n'est pas un ouvert pour $\mathcal{T}$.

Exercice 4

1. $\mathcal{C}$ contient X et $\emptyset$.
Si $U_1, ..., U_n \in \mathcal{C}$, alors :
- soit $U_i = \emptyset$ pour un certain i, et alors $\bigcap_i U_i = \emptyset \in \mathcal{C}$
- soit $X - U_i$ est fini pour tout i et alors $X - \left(\bigcap_i U_i\right) = \bigcup_i (X - U_i)$ est aussi fini donc $\bigcap_i U_i \in \mathcal{C}$

Si $\{U_i\}_{i \in I}$ est un ensemble d'éléments de $\mathcal{C}$, alors :
- soit $U_i = \emptyset$ pour tout i et alors $\bigcup_i U_i = \emptyset \in \mathcal{C}$
- soit $X - U_j$ est fini pour un certain j et alors $X - \left(\bigcup_i U_i\right) \subset X - U_j$ est fini et $\bigcup_i U_i \in \mathcal{C}$.

Cette topologie est séparée si X est fini (c'est la topologie discrète) mais pas si X est infini (car deux ouverts non-vides U et V vérifient toujours $U \cap V \neq \emptyset$, puisque $X - (U \cap V)$ est fini).

2. Soit $z \in X$. Soit U un ouvert contenant z. L'ensemble $X - U$ est fini. Notons $\alpha_1, ..., \alpha_s$ ses éléments. L'ensemble $\{n \text{ tq } x_n \notin U\} = \bigcup_{t \leq s} \{n \text{ tq } x_n = \alpha_t\}$ est fini. À partir d'un certain rang, la suite (x_n) est donc incluse dans U.

3. Il faut distinguer deux cas :
– X est fini : la topologie $\mathcal{C}$ est la topologie discrète. Toutes les fonctions sont continues pour la topologie discrète.
– X est infini : Soit f une fonction continue. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments tous distincts de X. Pour tout $z \in X$, $x_n \to z$ donc $f(x_n) \to f(z)$. Puisque, dans un espace séparé, la limite est unique, tous les $f(z)$ sont égaux : la fonction f est constante. Réciproquement, les fonctions constantes sont continues.

Exercice 5

Tous les termes peuvent être différents.
Soit $A = \mathbb{N}$. On utilise la topologie $\mathcal{T}$ suivante :

$$\mathcal{T} = \{\{x \in \mathbb{N} \text{ tq } x < a\} \text{ pour tout } a \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}\}$$

On peut vérifier qu'il s'agit bien d'une topologie.
Pour cette topologie, les fermés sont l'ensemble vide et les ensembles de la forme $\{x \in \mathbb{N} \text{ tq } x \geq a\}$, pour $a \in \mathbb{N}$.

Lemme 5.1. *Pour tout $s \geq 0$, $A^{(s)} = \{x \in \mathbb{N} \text{ tq } x \geq s\}$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur s. Pour $s = 0$, c'est vrai.
Supposons que c'est vrai pour s et montrons-le pour $s + 1$.

– Si $x \geq s+1$, alors $x \in A^{(s+1)}$: si F est fermé et contient $A^{(s)} - \{x\}$, alors F contient s (puisque $s \in A^{(s)}$ et $s \neq x$) donc F contient $\overline{\{x' \in \mathbb{N} \text{ tq } x' \geq s\}}$. Donc $x \in F$. Puisque c'est vrai pour tout fermé contenant $A^{(s)} - \{x\}$, $x \in \overline{A^{(s)} - \{x\}}$. Donc $x \in A^{(s+1)}$.
– Si $x < s+1$, alors $x \notin A^{(s+1)}$. Si $x < s$, $x \notin A^{(s)}$ donc $x \notin A^{(s+1)}$. Si $x = s$, l'ensemble $A^{(s)} - \{s\} = \{x \in \mathbb{N} \text{ tq } x \geq n+1\}$ est fermé donc $s \notin \overline{A^{(s)} - \{s\}}$ et $s \notin A^{(s+1)}$.

□

Exercice 6

1. Soit $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts de X. Notons :

$$\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N} \text{ tq } U_n \cap A \text{ est dénombrable}\}$$

L'ensemble $\left(\bigcup_{n\in\mathcal{N}} U_n\right) \cap A$ est dénombrable (car c'est l'union dénombrable des $U_n \cap A$ pour $n \in \mathcal{N}$, qui sont dénombrables).
De plus, $A - (A^* \cap A) \subset \left(\bigcup_{n\in\mathcal{N}} U_n\right) \cap A$. En effet, si $x \in A - (A^* \cap A)$, il existe, par définition de A^*, un voisinage V de x tel que $V \cap A$ est dénombrable. Puisque $\{U_n\}$ est une base d'ouverts, il existe n tel que $x \in U_n \subset V$. Pour cette valeur de n, $U_n \cap A$ est dénombrable. Donc $n \in \mathcal{N}$ et $x \in \left(\bigcup_{n\in\mathcal{N}} U_n\right)$.
(En réalité, les ensembles $A - (A^* \cap A)$ et $\left(\bigcup_{n\in\mathcal{N}} U_n\right) \cap A$ sont égaux.)
L'ensemble $A - (A^* \cap A)$ est donc inclus dans un ensemble dénombrable. Il est dénombrable.
Montrons d'abord que $A^* \subset A^{**}$. Soit $x \in A^*$.
Soit $V \subset X$ un voisinage quelconque de x. Il faut montrer que $A^* \cap V$ est indénombrable.
Puisque $x \in A^*$, $A \cap V$ est indénombrable. De plus, $A^* \cap V \supset (A \cap A^*) \cap V = (A \cap V) - (A - A^*)$.
Comme $A - A^*$ est dénombrable mais $A \cap V$ est indénombrable, $(A \cap V) - (A - A^*)$ est indénombrable et $A^* \cap V$ aussi.
Montrons maintenant que $X - A^* \subset X - A^{**}$.
Soit $x \in X - A^*$. Il existe V un voisinage ouvert de x tel que $A \cap V$ est dénombrable. Pour tout $y \in V$, V est un voisinage ouvert de y donc, puisque $A \cap V$ est dénombrable, $y \notin A^*$.
Donc $A^* \cap V = \emptyset$; en particulier, cet ensemble est dénombrable. Donc $x \notin A^{**}$.

2. Soit A un espace topologique à base dénombrable.
Prenons $X_1 = A^*$ et $X_2 = A - A^*$. L'ensemble A est bien la réunion disjointe de X_1 et X_2.
L'ensemble X_2 est dénombrable, d'après la question précédente.
L'ensemble X_1 n'a pas de point isolé : si x était un point isolé, x n'appartiendrait pas à $X_1^* = A^{**} = A^* = X_1$.
L'ensemble X_1 est fermé : si $x \in A - X_1 = X_2 = A - A^*$, alors il existe un voisinage ouvert V de x dans A tel que $V \cap A = V$ est dénombrable. Aucun élément de V n'appartient à A^* (puisqu'ils ont justement un voisinage dénombrable : V). Donc $A - X_1$ est ouvert. Donc X_1 est fermé.

Exercice 7

1. Soit $X = \{0,1\}$, muni de la topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$. Cette topologie vérifie T_0 : deux points distincts x et y sont nécessairement $x = 0, y = 1$ ou $x = 1, y = 0$ et $\{0\}$ est un voisinage de x qui ne contient pas y. En revanche, cette topologie n'est pas T_1 car 1 n'admet pas de voisinage ne contenant pas 0.

La topologie des parties de complémentaire fini sur un espace infini X ne vérifie pas T_2 (voir l'exercice 4) mais vérifie T_1 : si $x, y \in X$ sont distincts, $X - \{y\}$ est un voisinage de x ne contenant pas y.

2. a) La relation $\mathcal{R}$ est réflexive : pour toute fonction définie sur X, $f(x) = f(x)$.
La relation $\mathcal{R}$ est symétrique : $(f(x) = f(y)) \Rightarrow (f(y) = f(x))$.
La relation $\mathcal{R}$ est transitive : $(f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)) \Rightarrow (f(x) = f(z))$.
b) Soient $[x]$ et $[y]$ deux classes d'équivalence distinctes pour la relation $\mathcal{R}$. Nous allons montrer que ces points admettent des voisinages ouverts distincts.
Par définition de la relation d'équivalence, il existe $f : X \to Z$ une fonction continue à valeurs dans un espace topologique séparé telle que $f(x) \neq f(y)$.
Puisque Z est séparé, il existe $V_x, V_y \subset Z$ des ouverts tels que $f(x) \in V_x$, $f(y) \in V_y$ et $V_x \cap V_y = \emptyset$. Comme f est continue, $f^{-1}(V_x)$ et $f^{-1}(V_y)$ sont des ouverts de X. Ils sont disjoints et contiennent respectivement x et y. Notons-les $U_x = f^{-1}(V_x)$ et $U_y = f^{-1}(V_y)$.
L'ouvert U_x est saturé pour $\mathcal{R}$: si $a \in U_x, b \in X$ et $a\mathcal{R}b$, alors $b \in U_x$ (puisqu'alors $f(a) = f(b)$, par définition de $\mathcal{R}$, donc $b \in f^{-1}(V_x)$ ssi $a \in f^{-1}(V_x)$).
De même, U_y est saturé pour $\mathcal{R}$. Les ensembles $\pi(U_x)$ et $\pi(U_y)$ sont donc des ouverts de Y (car $\pi^{-1}(\pi(U_x)) = U_x$ est ouvert et de même pour U_y). Ils sont disjoints (car leurs antécédants par π le sont) et $[x] \in \pi(U_x), [y] \in \pi(U_y)$.
c) La projection π est continue (par définition : la topologie quotient est la topologie la plus fine telle que π soit continue) et on a vu que Y était séparé.
Soit Z un espace séparé et $f : X \to Z$ continue. Pour toute classe d'équivalence $[x] \in Y$, on pose $g([x]) = f(x)$. Cette définition est correcte puisque, si $x\mathcal{R}x'$, $f(x) = f(x')$.
Par construction, $f = g \circ \pi$.
De plus, la fonction g est continue : si $\mathcal{U}$ est un ouvert de Z, $g^{-1}(\mathcal{U}) = \pi(f^{-1}(\mathcal{U}))$. L'ensemble $f^{-1}(\mathcal{U})$ est saturé pour $\mathcal{R}$ (pour la même raison qu'à la question précédente) donc $\pi(f^{-1}(\mathcal{U}))$ est ouvert dans Y.
La fonction g est unique car, pour tout x, on doit avoir $g \circ \pi(x) = f(x)$. Il est donc nécessaire que $g([x]) = f(x)$.
d) Puisque π' est une application de X vers Y', qui est séparé, il existe une unique $g : Y \to Y'$ continue telle que $\pi' = g \circ \pi$.
De même, il existe une unique $g' : Y' \to Y$ telle que $\pi = g' \circ \pi'$.
Montrons que $g : Y \to Y'$ est un isomorphisme, de réciproque g'. Il faut montrer que $g' \circ g = \mathrm{Id}_Y$ et $g \circ g' = \mathrm{Id}_{Y'}$.
D'après les égalités qui précèdent, $\pi = g' \circ \pi' = (g' \circ g) \circ \pi$.
Or $\pi : X \to Y$ est une application continue à valeurs dans un espace séparé. Il existe donc une unique application $h : Y \to Y$ continue telle que $\pi = h \circ \pi$. Comme l'identité est une telle application, h doit nécessairement être l'identité. Or $g' \circ g$ est une telle application. Donc $g' \circ g = \mathrm{Id}_Y$.
De même, $g \circ g' = \mathrm{Id}_{Y'}$.