Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$3

Exercice 1 : questions diverses

1. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour tout $i \in I$, soit $A_i \subset X_i$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les A_i pour que $\prod_i A_i$ soit dense dans $\prod_i X_i$, muni de la topologie produit.

2. Soit (X, d) un espace métrique complet tel que X est dénombrable (et non-vide). Montrer que X a au moins un point isolé.

3. Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $f : X \to X$ une application continue telle que f^p est contractante pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f admet un unique point fixe.

4. a) Trouver un espace topologique X et deux distances d, d' qui engendrent la même topologie sur X, telles que (X, d) est complet mais pas (X, d').

b) Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $U \subset X$. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe une distance d' sur U qui engendre la même topologie que d et pour laquelle (U, d') est complet.

(2) U est une intersection dénombrable d'ouverts de X.

[Indication pour (1) $\Rightarrow$ (2) : commencer par se ramener au cas où d' est bornée et U est dense dans X. Démontrer ensuite qu'il existe une fonction de (X, d) dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de continuité est U et utiliser la question 1 de l'exercice 2.
Pour (2) $\Rightarrow$ (1) : commencer par le cas où U est un ouvert de X.]

Exercice 2 Soient X un espace topologique et (Y, d) un espace métrique.

1. Soit $f : X \to Y$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$E_n = \{x \in X \text{ tq } \exists \mathcal{V} \text{ un voisinage de } x \text{ tel que } \forall x', x'' \in \mathcal{V}, d(f(x'), f(x'')) < 1/n\}$$

Montrer que les E_n sont des ouverts de X et que $\{x \text{ tq } f \text{ est continue en } x\} = \bigcap_n E_n$.

2. On suppose maintenant $X = Y = \mathbb{R}$. On munit Y de la distance d usuelle.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ &= \frac{1}{q} \quad \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p, q \in \mathbb{Z}, q > 0 \text{ et } \frac{p}{q} \text{ irréductible} \end{aligned}$$

Montrer que f est continue en x si et seulement si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

b) Montrer, à l'aide du théorème de Baire, qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit continue en x si et seulement si $x \in \mathbb{Q}$.

3. On suppose toujours $X = Y = \mathbb{R}$. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'ouverts de X. Posons $U = \bigcap\limits_n E_n$. Nous allons montrer qu'il existe une fonction $f : X \to Y$ dont l'ensemble des points de continuité est U.
a) Montrer qu'il existe une fonction $h : X \to [3/4; 1]$ qui ne soit continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
b) Pour tout $x \in X$, notons $N(x) = \min\{n \text{ tq } x \notin E_n\}$. On pose, par convention, $N(x) = \infty$ si $x \in \bigcap\limits_n E_n$.
Montrer que l'ensemble des points de continuité de la fonction $f : x \to 2^{-N(x)}h(x)$ est exactement $\bigcap\limits_n E_n$.

Exercice 3 : Topologie finale et topologie quotient

1. Soient $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ des espaces topologiques. Soit Y un ensemble quelconque. Soit, pour tout α, $f_\alpha : X_\alpha \to Y$ une fonction.
a) Montrer qu'il existe une unique topologie sur Y qui est la plus fine parmi les topologies pour lesquelles les f_α sont continues. On l'appelle la *topologie finale* et on la note $\mathcal{T}_{fin}$.
Si E est une partie de Y, donner une condition nécessaire et suffisante sur les $f_\alpha^{-1}(E)$ pour que E soit un ouvert de $\mathcal{T}_{fin}$.
b) Soit Z un espace topologique. Soit $g : Y \to Z$ une fonction. Montrer que g est continue pour $\mathcal{T}_{fin}$ si et seulement si $g \circ f_\alpha$ est continue pour tout $\alpha \in A$.

2. Soit X un espace topologique. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. On appelle $Y = X/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour X et on note $\pi : X \to Y$ l'application qui à un élément associe sa classe d'équivalence par $\mathcal{R}$ (appelée *projection canonique*).
On appelle *topologie quotient* sur Y la topologie finale associée à π.
a) Si $U \subset X$, on dit que l'ensemble U est *saturé* si, pour tout $x \in U$ et pour tout y tel que $x\mathcal{R}y$, $y \in U$.
Montrer que les ouverts de Y sont les images par π des ouverts saturés de X.
b) Exemple 1 : on prend $X = \mathbb{R}$ et on définit $\mathcal{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \quad \text{ssi } x - y \in \mathbb{Z}$$

Montrer que $X/\mathcal{R}$, muni de la topologie quotient, est homéomorphe à S^1 (le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ pour la topologie usuelle).
c) Exemple 2 : on prend $X = \mathbb{R}$ et on définit $\mathcal{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \quad \text{ssi } x - y \in \mathbb{Q}$$

Que pouvez-vous-dire de la topologie quotient de $X/\mathcal{R}$? Est-elle séparée ?
[Bonus : faire l'exercice 7 du TD de la semaine dernière.]

Exercice 4 : topologie de la convergence simple

Soit $E = [0; 1]^{[0;1]}$ (c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f : [0; 1] \to [0; 1]$). On munit cet espace de la topologie produit.

1. Montrer qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge pour la topologie produit si et seulement si elle converge simplement (au sens de la convergence simple usuelle des fonctions).

2. On note F le sous-ensemble de E constitué des fonctions continues par morceaux et muni de la topologie induite par celle de E.
Soit $I : F \to \mathbb{R}$ l'application suivante :

$$I(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

a) Montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F vers une fonction f_∞, alors $I(f_n) \to I(f_\infty)$.
b) Montrer que I n'est pas continue en la fonction nulle.

3. Montrer que E n'est pas métrisable.

Exercice 5 : topologie boîte
On munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de la topologie dont une base est donnée par les ensembles produits de la forme $\prod_{k=0}^{+\infty} U_k$, où les U_k sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
1. Caractériser les suites convergentes pour cette topologie.

2. On définit la suite δ^n de terme général $\delta_k^n = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Considérons l'ensemble :

$$E = \left\{ \frac{1}{n}\delta^0 + x\delta^n,\ n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Montrer que $0 \in \overline{E}$, mais qu'aucune suite de E ne converge vers 0. En déduire que cette topologie n'est pas métrisable.

3. Soit $C = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tq } x_n \to 0\}$. Montrer que C est ouvert dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4. Soit $D = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tq } x_n \not\to 0\}$. Montrer que D est ouvert dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 6 : Espaces paracompacts
Soit X un espace topologique.
On dit qu'une famille d'ouverts $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ est un *recouvrement ouvert* de X si $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$.
On dit qu'un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ est un *raffinement* du recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ si, pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $V \subset U$.
On dit qu'une famille $\mathcal{U}$ d'ouverts de X est *localement finie* si, pour tout $x_0 \in X$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $\{U \in \mathcal{U} \text{ tq } U \cap V \neq \emptyset\}$ est fini.
On dit que X est *paracompact* si X est séparé et si tout recouvrement ouvert de X admet un raffinement localement fini.

1. Soit $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ une famille localement finie d'ouverts de X. Montrer que $\overline{\bigcup_\alpha U_\alpha} = \bigcup_\alpha \overline{U_\alpha}$.

2. Dans cette question, on montre qu'un espace paracompact est régulier, c'est-à-dire que si $F \subset X$ est fermé et $x_0 \in X - F$, il existe U_1, U_2 des ouverts disjoints de X tels que $F \subset U_1$ et $x_0 \in U_2$.
Soient F un fermé et x_0 un point n'appartenant pas à F.
a) Pour tout $x \in F$, soient U_x et V_x deux ouverts disjoints tels que $x \in U_x$ et $x_0 \in V_x$. Ils existent car X est séparé.
Posons $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x\in F} \cup \{X - F\}$.

Montrer que $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de X.
b) Soit $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un raffinement localement fini de $\mathcal{U}$. Notons $\mathcal{E} = \{\alpha \in A \text{ tq } \exists x, W_\alpha \subset U_x\}$ et posons $\Omega = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{E}} W_\alpha$.
Montrer que Ω est un ouvert contenant F.
c) Montrer que $X - \overline{\Omega}$ est un ouvert contenant x_0. Conclure.

3. Par une démonstration similaire à celle de la question précédente, montrer qu'un espace paracompact est normal.

4. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^N$, muni de sa topologie usuelle, est paracompact.

[Plus généralement, un théorème dû à Arthur Stone affirme tous les espaces métriques sont paracompacts. Une démonstration simple de ce résultat se trouve dans A new proof that metric spaces are paracompact, de Mary Ellen Rudin, que vous pouvez lire si vous savez ce que sont les ordinaux.]