Feuille d'exercices n^{o}3

Corrigé

Exercice 1

1. Il faut et il suffit que chaque A_i soit dense dans X_i.
Si A_i est dense dans X_i pour tout i : soit $U \subset \prod_i X_i$ un ouvert non-vide. Il faut montrer qu'il contient un point de $\prod_i A_i$. L'ensemble des $\prod_i V_i$ tels que V_i est un ouvert de X_i et $V_i \neq X_i$ seulement pour un nombre fini d'indices i est une base d'ouverts de la topologie produit. L'un de ces ensembles $\prod_i V_i$ (non-vide) est donc inclus dans U. Pour tout i, puisque A_i est dense dans X_i, il existe $x_i \in A_i \cap V_i$. Alors $(x_i)_{i\in I} \in \left(\prod_i A_i\right) \cap U$.
Si A_i n'est pas dense dans X_i pour tout i : il existe $j \in I$ et $U_j \subset X_j$ un ouvert non-vide tels que $A_j \cap U_j = \emptyset$. Posons $V = \{(x_i)_i \in \prod_i X_i \text{ tq } x_j \in U_j\}$. Alors V est ouvert mais $V \cap \left(\prod_i A_i\right) = \emptyset$. Donc $\prod_i A_i$ n'est pas dense.

2. Soient $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les points de X. Pour tout n, $\{x_n\}$ est un fermé de X. De plus, $\bigcup_n \{x_n\} = X$. Or, d'après le théorème de Baire, une union de fermés d'intérieur vide est toujours d'intérieur vide. Puisque X n'est pas d'intérieur vide, il existe au moins un n tel que $\{x_n\}$ n'est pas non plus d'intérieur vide. Alors $\{x_n\}$ est ouvert donc x_n est un point isolé de x.

3. Soit p tel que f^p est contractante. Soit $\rho \in [0;1[$ tel que, pour tous $x, y \in X$:

$$d(f^p(x), f^p(y)) \leq \rho d(x,y)$$

D'après un théorème de point fixe, l'application f^p admet un unique point fixe sur X. Notons-le x_0 et montrons qu'il s'agit aussi d'un point fixe pour f.
Puisque f^p est ρ-contractante :

$$d(f(x_0), x_0) = d(f(f^p(x_0)), f^p(x_0)) = d(f^p(f(x_0)), f^p(x_0)) \leq \rho d(f(x_0), x_0)$$

Puisque $\rho < 1$, cela implique que $d(f(x_0), x_0) = 0$.
Le point fixe de f est unique car celui de f^p l'est.

4. a) Soit $X = \mathbb{R}$. Soit d la distance usuelle ; (X, d) est complet.
Soit $\phi : \mathbb{R} \to]0;1[$ un homéomorphisme. Notons $d'(x,y) = |\phi(x) - \phi(y)|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. C'est une distance sur $\mathbb{R}$. Pour cette distance, $(\mathbb{R}, d')$ est isométrique à $]0;1[$ muni de la distance usuelle. Comme ce dernier espace n'est pas complet, $(\mathbb{R}, d')$ non plus.
b) (1) $\Rightarrow$ (2) : on peut supposer que d' est bornée. En effet, $d_2 = \min(1, d')$ est une distance qui engendre la même topologie que d' et telle que (X, d_2) est complet.

On peut également supposer que U est dense dans X, quitte à remplacer X par $\overline{U}$. En effet, l'espace $\overline{U}$ est aussi complet (c'est un fermé d'un espace complet). De plus, si U est une intersection dénombrable d'ouverts de $\overline{U}$, c'est aussi une intersection dénombrable d'ouverts de X.

Démonstration de l'affirmation qui précède. Si U est une intersection dénombrable d'ouverts de $\overline{U}$, on peut écrire $U = \bigcap_n (\overline{U} \cap V_n) = \left(\bigcap_n V_n\right) \cap \overline{U}$ avec les V_n ouverts dans X.
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \{x \in X \text{ tq } d(x, \overline{U}) < 1/n\}$. Les W_n sont ouverts et leur intersection vaut $\overline{U}$.
Donc $U = \left(\bigcap_n V_n\right) \cap \left(\bigcap_n W_n\right)$. C'est bien une intersection dénombrable d'ouverts de X. □

Posons, pour tout $z \in X$, $f(z) = \sup \left\{\limsup_n d'(x_n, x_{n+1}) \text{ tq } x \in U^{\mathbb{N}} \text{ et } x_n \to z \text{ pour } d\right\}$.

- Si $z \in U$, $f(z) = 0$ et f est continue en z pour la distance d : toute suite x d'éléments de U convergeant vers z pour d converge aussi vers z pour d', puisque les distances d et d' engendrent la même topologie sur U. Donc x est de Cauchy pour d' et $d'(x_n, x_{n+1}) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Puisque c'est vrai pour toute suite x, $f(z) = 0$.
  Montrons que f est continue en z. Soit (z_n) une suite d'éléments de X convergeant vers z. On suppose par l'absurde que $f(z_n) \not\to f(z) = 0$. Quitte à extraire, on peut supposer que $f(z_n) > \epsilon$ pour tout n, pour un certain $\epsilon > 0$.
  Pour tout n, soit $(x_m^{(n)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de U convergeant vers z_n pour d telle que $\limsup_m d'(x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)}) > \epsilon$. Soit $m(n)$ tel que :
  $$d(x_{m(n)}, z_n) < \frac{1}{n+1} \qquad d(x_{m(n)+1}, z_n) < \frac{1}{n+1} \qquad d'(x_{m(n)}, x_{m(n)+1}) > \epsilon$$
  La suite $(x_{m(1)}, x_{m(1)+1}, x_{m(2)}, x_{m(2)+1}, \ldots)$ converge vers z pour la distance d. Elle converge donc aussi pour la distance d', ce qui est absurde car elle n'est pas de Cauchy pour d'.
- Si $z \in X - U$, $f(z) > 0$ et f n'est pas continue en z : soit x une suite d'éléments de U convergeant vers z pour la distance d. Une telle suite existe car U est dense dans X. La suite x n'est pas de Cauchy pour d', sinon sa limite serait dans U, puisque (U, d') est complet.
  Puisque cette suite n'est pas de Cauchy, il existe $n_0, n_1, n_2, \ldots$ une suite strictement croissante d'entiers telle que $d'(x_{n_{2k}}, x_{n_{2k+1}}) \not\to 0$ quand $k \to +\infty$. La suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers z pour d donc $f(z) \geq \limsup_n d'(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) > 0$.
  Puisque U est dense dans X, il existe une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de U convergeant vers z. Pour tout n, $f(z_n) = 0$ (puisque $z_n \in U$). Donc $f(z_n) \not\to f(z)$. Donc f n'est pas continue en z.

L'ensemble U est donc l'ensemble des points de continuité de la fonction f. D'après l'exercice 2, question 1, c'est une intersection dénombrable d'ouverts.
(2) ⇒ (1)

Lemme 1.1. *Si U est un ouvert de X, alors (1) est vraie.*

Démonstration. Si $U = X$, c'est évident : $d' = d$ convient.
Sinon, posons, pour tout $x \in U$, $f(x) = d(x, X - U) > 0$ et définissons, pour tous $x, x' \in U$:

$$d'(x, x') = d(x, x') + \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x')} \right|$$

La fonction d' est symétrique. De plus, $d' \geq d$ donc d' est séparante. Elle vérifie l'inégalité triangulaire. C'est donc une distance.

– Les distances d et d' engendrent la même topologie sur U : d'un part, puisque $d' \geq d$, la topologie engendrée par d' est plus fine que celle engendrée par d. Montrons la réciproque. Soient $x \in U$, $\epsilon > 0$. Il faut montrer que $B_d(x, \epsilon') \subset B_{d'}(x, \epsilon)$ pour un certain $\epsilon' > 0$.
  La fonction f est continue et ne s'annule pas au voisinage de x ; son inverse $1/f$ est donc également continue. Soit ϵ' suffisamment petit pour que :

$$\forall x' \in B_d(x, \epsilon'), \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x')} \right| < \epsilon/2$$

  Alors $B_d(x, \min(\epsilon', \epsilon/2)) \subset B_{d'}(x, \epsilon)$.
– (U, d') est complet : soit (x_n) une suite de Cauchy pour d'. Puisque $d' \geq d$, c'est aussi une suite de Cauchy pour d. Soit x_∞ sa limite pour d. Si $x_\infty \in U$, alors $x_n \to x_\infty$ pour d' puisque d et d' engendrent la même topologie sur U. Il suffit donc de montrer que $x_\infty \in U$.
  Si ce n'est pas le cas, $f(x_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} d'(x_m, x_n) = +\infty$. Ce n'est pas possible, puisque la suite est de Cauchy, donc $x_\infty \in U$.

$\square$

Supposons maintenant que $U = \bigcap\limits_n V_n$ avec V_n ouvert dans x, pour tout n. Pour tout n, notons d'_n une distance sur V_n qui engendre la même topologie que d et rend V_n complet. Elle existe, d'après le lemme précédent.
Quitte à remplacer les d'_n par $\min(1, d'_n)$, on peut supposer que ces distances sont bornées par 1.
Posons $d' = \sum\limits_n 2^{-n} d'_n$.

– La distance d' engendre la même topologie que d sur U. De manière générale, si, sur un espace X, les δ_n sont des distances bornées par 1 engendrant la même topologie, $\sum\limits_n 2^{-n} \delta_n$ engendre aussi la même topologie.
– Pour la distance d', U est complet. En effet, si x est une suite de Cauchy pour d', c'est une suite de Cauchy pour chaque d'_n (car $d'_n \leq 2^n d'$). Elle admet donc une limite dans V_n pour chaque d'_n. Cette limite est également la limite pour d (puisque d'_n et d sont équivalentes sur V_n ; la convergence pour d'_n implique donc la convergence pour d). Toutes les limites pour les d'_n sont donc les mêmes et appartiennent donc à $\bigcap\limits_n V_n = U$. Notons x_∞ la limite.
  Puisque x converge vers x_∞ pour chaque d'_n, x converge vers x_∞ pour d' et cette suite de Cauchy a bien une limite.

Exercice 2

1. Montrons que E_n est ouvert. Si $x \in E_n$, il existe $\mathcal{V}$ un voisinage de x tel que, pour tous $x', x'' \in \mathcal{V}$, $d(f(x'), f(x'')) < 1/n$. Quitte à prendre $\mathcal{V}$ un peu plus petit, on peut supposer que $\mathcal{V}$ est ouvert. Alors $\mathcal{V} \subset E_n$.

Montrons que f est continue en x si et seulement si $x \in \bigcap\limits_n E_n$.

- Si f est continue en x : pour tout n, il existe $\mathcal{V}$ un voisinage de x tel que, pour tout $x' \in \mathcal{V}$, $d(f(x), f(x')) < 1/2n$. Alors, pour tous $x', x'' \in \mathcal{V}$, $d(f(x'), f(x'')) \leq d(f(x'), f(x)) + d(f(x), f(x'')) < 1/n$. Donc $x \in E_n$.
- Si $x \in \bigcap\limits_n E_n$: soit $\epsilon > 0$ quelconque. Soit n tel que $1/n < \epsilon$. Comme $x \in E_n$, il existe $\mathcal{V}$ tel que, pour tout $x' \in \mathcal{V}$, $d(f(x), f(x')) < 1/n < \epsilon$.

2. a) Si $x \in \mathbb{Q}$, f n'est pas continue en x. En effet, puisque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe (x_n) une suite d'irrationnels convergeant vers x. Alors $f(x_n) \to 0 \neq f(x)$.

Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, f est continue en x. En effet, soit $\epsilon > 0$ quelconque. Soit q tel que $\frac{1}{q} < \epsilon$. Posons :

$$E = \{\frac{p}{q'} \text{ tq } q' \in \{1, ..., q-1\} \text{ et } p \in \mathbb{Z}\}$$

Cet ensemble est fermé et ne contient pas x. Soit $\eta < d(x, E)$. Pour tout $y \in]x - \eta; x + \eta[$, puisque $y \notin E$, $f(y) \leq 1/q < \epsilon$.

b) D'après la question 1., si c'est le cas, $\mathbb{Q}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbb{Q} = \bigcap_n E_n$$

avec les E_n ouverts. Tous les E_n sont denses car ils contiennent $\mathbb{Q}$.

D'après le théorème de Baire, puisque $\mathbb{R}$ est complet pour la topologie usuelle, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense donc non-vide. Pourtant, on devrait avoir :

$$\emptyset = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{Q} + \pi) = \left(\bigcap_n E_n\right) \cap \left(\bigcap_n (E_n + \pi)\right)$$

Les E_n et $E_n + \pi$ étant justement des ouverts denses, c'est impossible.

3. a) La fonction $h = 3/4 + 1_{\mathbb{Q}}/4$ convient (où $1_{\mathbb{Q}}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des rationnels).

b) Soit d'abord $x \in \bigcap\limits_n E_n$. Montrons que f est continue en x. Soit x_n une suite d'éléments de X convergeant vers x.

Pour tout M, $\bigcap\limits_{m \leq M} E_n$ est un voisinage ouvert de x. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, $x_n \in \bigcap\limits_{m \leq M} E_n$, ce qui implique $N(x_n) > M$.

Donc $(N(x_n))$ tend vers $+\infty$. Puisque h est une fonction bornée, $f(x_n) \to 0 = f(x)$.

Soit maintenant x un point de continuité de f. Montrons que $x \in \bigcap\limits_n E_n$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $N(x) < +\infty$.

Puisque $f(x) \in [\frac{3}{4}2^{-N(x)}; 2^{-N(x)}]$ et f est continue en x, il existe U un voisinage ouvert de x tel que :

$$\forall y \in U, f(y) \in [\frac{5}{8}2^{-N(x)}; \frac{5}{4}2^{-N(x)}]$$

Pour tout y, si $N(y) > N(x)$, $f(y) \leq 2^{-N(x)-1} < \frac{5}{8}2^{-N(x)}$. D'autre part, si $N(y) < N(x)$, $f(y) \geq \frac{3}{4}2^{-N(x)+1} > \frac{5}{4}2^{-N(x)}$.
Le fait que $f(y) \in [\frac{5}{8}2^{-N(x)}; \frac{5}{4}2^{-N(x)}]$ implique donc que $N(y) = N(x)$. La fonction N est donc constante sur U.
La fonction h est discontinue en x. Soit donc $\epsilon > 0$ tel que, pour tout voisinage V de x, il existe $x' \in V$ tel que $|h(x) - h(x')| > \epsilon$.
Si V est un voisinage de x, $V \cap U$ aussi, puisque U est un voisinage de X. Il existe donc $x' \in V \cap U$ tel que $|h(x) - h(x')| > \epsilon$. On a alors $x' \in V$ et $|f(x) - f(x')| = 2^{-N(x)}|h(x) - h(x')| > \epsilon 2^{-N(x)}$.
La fonction f n'est donc pas continue en x. C'est absurde.

Exercice 3

1. a) Soit $\mathcal{T}_{fin} = \{U \subset Y \text{ tq } f_\alpha^{-1}(U) \text{ est ouvert pour tout } \alpha \in A\}$.

C'est une topologie :

- $\emptyset, Y \in \mathcal{T}_{fin}$
- si $U_i \in \mathcal{T}_{fin}$ pour tout i, alors $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}_{fin}$ car, pour tout α, $f_\alpha^{-1}\left(\bigcup_i U_i\right) = \bigcup_i f_\alpha^{-1}(U_i)$ donc est ouvert.
- de même, si $U, V \in \mathcal{T}_{fin}$, $U \cap V \in \mathcal{T}_{fin}$.

Si $\mathcal{T}$ est une autre topologie pour laquelle toutes les f_α sont continues, alors $\mathcal{T}_{fin}$ est plus fine que $\mathcal{T}$. En effet, si $U \in \mathcal{T}$, $f_\alpha^{-1}(U)$ est un ouvert pour tout $\alpha \in A$, puisque f_α est continue pour $\mathcal{T}$. Donc $U \in \mathcal{T}_{fin}$.

Cette topologie est unique. En effet, s'il existe deux topologies plus fines que toutes les topologies pour lesquelles les f_α sont continues, elles sont chacunes plus fines l'une que l'autre donc égales.

La condition nécessaire et suffisante est donc que tous les $f_\alpha^{-1}(E)$ soient ouverts.

b) Si g est continue, $g \circ f_\alpha$ est continue pour tout $\alpha \in A$ car la composée de fonctions continues est continue.

Réciproquement, si $g \circ f_\alpha$ est continue pour tout α : soit U un ouvert de Z. Alors, pour tout α, $f_\alpha^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f_\alpha)^{-1}(U)$. Ce dernier ensemble est ouvert pour tout α, puisque $g \circ f_\alpha$ est continue. Donc, d'après la première question, $g^{-1}(U)$ est un ouvert.

2. a) Si U est un ouvert de Y, puisque π est continue, $V = \pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X. Cet ouvert est saturé et $U = \pi(V)$ donc U est bien l'image par π d'un ouvert saturé.

Réciproquement, si $U = \pi(V)$ avec V un ouvert saturé, alors $\pi^{-1}(U) = V$ et, comme V est ouvert dans X, U est ouvert dans Y, d'après la question 1.a).

b) Soit $f : x \in X/\mathcal{R} \to S^1$ l'application telle que $f(x) = \exp(2\pi i x)$. Cette application est bien définie. Elle est continue pour la topologie quotient, d'après la question 1.b), car $f \circ \pi$ est continue (c'est l'application qui à x associe $\exp(2\pi i x)$).

Soit $g : S^1 \to X/\mathcal{R}$ l'application telle que $g(x) = \left[\frac{\arg x}{2\pi}\right]$ (où arg désigne l'argument au sens complexe, dans $[0; 2\pi[$, et les crochets désignent la classe d'équivalence par $\mathcal{R}$).

C'est une application continue. En effet, soit $z \in S^1$ quelconque. Nous allons montrer que g est continue en z. Si $\arg z \neq 0$, la fonction arg est continue au voisinage de z (sur $\mathbb{C}$ et donc, par restriction, sur S^1). Au voisinage de z, la fonction g est donc égale à $\pi \circ \arg$, ce qui est une application continue. Donc g est continue en z.

Si $\arg z = 0$, le raisonnement est toujours valable. Il suffit pour l'appliquer de remarquer qu'on a aussi, pour tout x, $g(x) = \left[\frac{\tilde{\arg} x}{2\pi}\right]$ où $\tilde{\arg}$ désigne l'argument dans $[-\pi;\pi[$, qui est une fonction continue au voisinage de z.
Puisque $g \circ f = \mathrm{Id}_{X/\mathcal{R}}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{S^1}$, f est un isomorphisme de $X/\mathcal{R}$ vers S^1.
c) Les ouverts de $\mathbb{R}$ saturés pour $\mathcal{R}$ sont tous égaux à $\emptyset$ ou $\mathbb{R}$. En effet, il est clair que ceux-là sont des ouverts saturés.
Réciproquement, si U est un ouvert saturé non-vide de $\mathbb{R}$, montrons que $U = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. L'ensemble $x + \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x + r \in U$. Puisque U est saturé et $(x + r)\mathcal{R}x$, $x \in U$.
Donc $U = \mathbb{R}$.
Les deux seuls ouverts de $X/\mathcal{R}$ sont $\emptyset$ et $X/\mathcal{R}$. La topologie quotient est donc la topologie grossière. En particulier, puisque $X/\mathcal{R}$ n'est pas réduit à un singleton (il y a plusieurs classes d'équivalence par $\mathcal{R}$), cet ensemble n'est pas séparé.

Exercice 4

1. Soit $f_\infty \in E$. On sait que $f_n \to f_\infty$ pour la topologie de E si et seulement si l'application suivante est continue :

$$G : n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to f_n \in E$$

(où $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est muni de la topologie engendrée par les ensembles finis et les ensembles de la forme $\{a, a + 1, a + 2, ...\} \cup \{\infty\}$)
Cette application est continue si et seulement si $\pi_h \circ G$ est continue pour tout $h \in [0; 1]$, où π_h est l'application $f \in E \to f(h) \in [0; 1]$. (C'est une propriété de la topologie produit.)
L'application G est donc continue si et seulement si, pour tout h, l'application $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to f_n(h)$ est continue, c'est-à-dire si, pour tout h, $(f_n(h))_{n\in\mathbb{N}} \to f_\infty(h)$, ce qui revient à dire que (f_n) converge simplement vers f_∞.

2. a) C'est le théorème de convergence dominée (la fonction 1 dominant tous les éléments de F).
b) Nous allons montrer qu'il n'existe pas de voisinage U de la fonction nulle tel que, pour toute $f \in U$, $I(f) < 1$.
En effet, si U est un voisinage de 0, il existe $x_1, ..., x_s \in [0; 1]$ distincts et $V_1, ..., V_s$ des ouverts de $[0; 1]$ tels que $0 \in \{f \in F \text{ tq } f(x_k) \in V_k \text{ pour tout } k\} \subset U$. On doit avoir $0 \in V_k$ pour tout k (sinon l'ensemble considéré ne contient pas la fonction nulle).
Notons f_0 la fonction telle que $f_0(x) = 1$ pour tout x sauf si $x \in \{x_1, ..., x_s\}$, auquel cas $f_0(x) = 0$.
Alors $f_0 \in U$ mais $I(f_0) = 1$.

3. Si E était métrisable, F le serait aussi et serait à base dénombrable de voisinages. Sur un espace à base dénombrable de voisinages, toute fonction séquentiellement continue est continue. D'après la question 2., ce n'est pas le cas ici donc E n'est pas métrisable.

Exercice 5

1. Soit $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ (c'est-à-dire que, pour tout n, $(u_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels). Soit $u^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Alors $u^{(n)} \to u^\infty$ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

(1) Pour tout k, $u_k^{(n)} \to u_k^\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
(2) Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que les suites $(u_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires en u_k^∞ à partir au moins du rang M, pour tous les k sauf un nombre au plus fini.

Sens direct : si $u^{(n)} \to u^\infty$.
Montrons d'abord (1). Soit k quelconque. Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $\{v \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ tq $v_k \in]u_k^\infty - \epsilon; u_k^\infty + \epsilon[\}$ est ouvert dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ et contient u^∞. À partir d'un certain rang, $u^{(n)}$ appartient donc à cet ensemble, ce qui revient à dire que $|u_k^{(n)} - u_k^\infty| < \epsilon$.
Montrons maintenant (2). Si ce n'est pas le cas, il existe, pour tout M, un nombre infini d'indices k tel que la suite $(u_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire à partir du rang M. Pour tout M, on fixe k_M un tel indice (en prenant les k_M distincts deux à deux) et $n_M \geq M$ tel que $u_{k_M}^{(n_M)} \neq u_{k_M}^\infty$. Soit également, pour tout M, V_M un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $u_{k_M}^\infty$ mais pas $u_{k_M}^{(n_M)}$.
Notons $E = \{v$ tq $v_{k_M} \in V_M, \forall M \in \mathbb{N}\}$. C'est un voisinage ouvert de u^∞ mais, pour tout M, $u^{(n_M)} \notin E$. La suite $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'appartient donc pas à E à partir d'un certain rang, ce qui est en contradiction avec le fait qu'elle converge vers u^∞.

Sens indirect : supposons maintenant (1) et (2) vérifiées et montrons la convergence.
Soit $W = \prod_k V_k$ un ouvert contenant u^∞ (on peut se restreindre aux ouverts de cette forme puisqu'ils constituent une base de la topologie). Nous allons montrer que $u^{(n)} \in W$ pour tout n assez grand.
Soit $M \in \mathbb{N}$ tel que toutes les suites $(u_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ stationnent en u_k^∞ à partir du rang M pour tout k sauf un nombre au plus fini. Notons $k_1, ..., k_s$ les indices pour lesquels les suites ne stationnent pas.
Pour tout n assez grand, $u_{k_i}^{(n)} \in V_{k_i}$ pour tout $i \leq s$ (d'après (1)). De plus, pour tout $n \geq M$, $u_k^{(n)} = u_k^\infty \in V_k$ si k n'est pas l'un des k_i. Donc, pour tout n assez grand, $u^{(n)} \in W$.
2. Soit $\prod_k U_k$ un voisinage de 0. Nous allons montrer qu'il est d'intersection non-vide avec E.
Soit n tel que $1/n \in U_0$. Il existe car $0 \in U_0$.
Soit $x \neq 0$ tel que $x \in U_n$.
Pour ces choix, $\frac{1}{n}\delta^0 + x\delta^n$ appartient au voisinage.
Soit, par l'absurde, $\left(\frac{1}{n_k}\delta^0 + x_k\delta^{(n_k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers 0. D'après la propriété (1) décrite à la question 1., $\frac{1}{n_k} \to 0$.
D'après la propriété (2), il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous les indices $i > 0$ sauf un nombre au plus fini, $(x_k\delta_i^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire en 0 à partir du rang M. Or, pour tout $i = n_k$ avec $n_k \geq M$, ce n'est pas le cas car $x_k\delta_{n_k}^{(n_k)} = x_k \neq 0$. C'est absurde.

3. a) Soit $\mathcal{E} = \bigcup_{x\in C} \left(\prod_k] - |x_k|; |x_k|[\right)$. C'est un ouvert de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Montrons qu'il est égal à C.
Si $x \in C$, posons $x'_n = |x_n| + \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors $x'_n \in C$ et $x \in \prod_k] - |x'_k|; |x'_k|[\subset \mathcal{E}$.
Réciproquement, si $x \in \mathcal{E}$, il existe $x' \in C$ telle que $x \in \prod_k] - |x'_k|; |x'_k|[$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k| < |x'_k|$. Puisque $x' \to 0$ (car $x' \in C$), $x \to 0$ donc $x \in C$.
b) Soit $\mathcal{E} = \bigcup_{\epsilon>0,\, A\subset\mathbb{N} \text{ infini}} \{x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ tq $|x_k| > \epsilon, \forall k \in A\}$.

Cet ensemble est ouvert. Montrons qu'il est égal à D.
Si $x \in D$: il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour une infinité d'indices k, $|x_k| > \epsilon$. Notons A cette infinité d'indices. Alors $x \in \{x' \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tq } |x'_k| > \epsilon, \forall k \in A\} \subset \mathcal{E}$.
Si $x \in \mathcal{E}$. Soient $\epsilon > 0$ et $A \subset \mathbb{N}$ infini tels que $x \in \{x' \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tq } |x'_k| > \epsilon, \forall k \in A\}$. Puisque $|x_k| > \epsilon$ pour une infinité d'éléments k, $x \not\to 0$ donc $x \in D$.

Exercice 6

1. Pour tout $\alpha_0 \in A$, $\overline{\bigcup_\alpha U_\alpha}$ est un fermé contenant U_{α_0} donc $\overline{U_{\alpha_0}} \subset \overline{\bigcup_\alpha U_\alpha}$. Donc :

$$\bigcup_\alpha \overline{U_\alpha} \subset \overline{\bigcup_\alpha U_\alpha}$$

Montrons l'autre inclusion. Soit $x \notin \bigcup_\alpha \overline{U_\alpha}$.
Soit V un voisinage de x qui n'intersecte non-trivialement qu'un nombre au plus fini de U_α. Notons $\{\alpha_1, ..., \alpha_s\}$ les indices de ces U_α.
Pour tout k, il existe W_k un voisinage de x disjoint de U_{α_k} (puisque $x \notin \overline{U_{\alpha_k}}$). Prenons $V' = V \cap W_1 \cap ... \cap W_n$. C'est un voisinage de x.
Pour tout $\alpha \in A$, soit α est l'un des α_k et alors $V' \cap U_{\alpha_k} \subset W_k \cap U_{\alpha_k} = \emptyset$, soit α n'est pas l'un des α_k et alors $V' \cap U_\alpha \subset V \cap U_\alpha = \emptyset$ par définition des α_k.
Donc $V' \cap \left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) = \emptyset$ et $x \notin \overline{\bigcup_\alpha U_\alpha}$.

2. a) Par construction, les U_x sont des ouverts. $X - F$ est ouvert car F est fermé.
Pour tout $x \in F$, $x \in U_x$. Pour tout $x \notin F$, $x \in X - F$. Donc $\left(\bigcup_x U_x\right) \cup (X - F) = X$.
b) C'est un ouvert car il s'agit d'une union d'ouverts. De plus, pour tout $x \in F$, il existe $\alpha \in A$ tel que $x \in W_\alpha$ (puisque $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement). On n'a alors pas $W_\alpha \subset X - F$. Il existe donc $x' \in F$ tel que $W_\alpha \subset U_{x'}$. Donc $\alpha \in \mathcal{E}$ et $x \in W_\alpha \subset \Omega$.
Puisque c'est vrai pour tout $x \in F$, $F \subset \Omega$.
c) Cet ensemble est ouvert car c'est le complémentaire d'un fermé.
De plus, $\overline{\Omega} = \overline{\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}} W_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}} \overline{W_\alpha}$. Pour tout $\alpha \in \mathcal{E}$, $x_0 \notin \overline{W_\alpha}$. En effet, il existe x tel que $W_\alpha \subset U_x$. Alors $\overline{W_\alpha} \subset \overline{U_x}$. L'ouvert V_x est un voisinage de x_0 sans intersection avec U_x donc $x_0 \notin \overline{U_x}$. Donc $x_0 \notin \overline{W}_\alpha$.
Donc $x_0 \notin \overline{\Omega}$ et $x_0 \in X - \overline{\Omega}$.
Donc Ω et $X - \overline{\Omega}$ sont deux ouverts disjoints dont l'un contient F et l'autre x_0.

3. Pour tout $x \in F_1$, soient U_x, V_x deux ouverts disjoints tels que $x \in U_x$ et $F_2 \subset V_x$. Ces ouverts existent d'après la question 2.
La famille $\{U_x\}_{x \in F_1} \cup \{X - F_1\}$ est un recouvrement ouvert de X. Soit $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un raffinement localement fini de ce recouvrement.
Notons $\mathcal{E} = \{\alpha \in A \text{ tq } \exists x \in F_1, W_\alpha \subset U_x\}$ et posons $\Omega = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}} W_\alpha$.
De même que précédemment, c'est un ouvert contenant F_1. De même que précédemment également, $X - \overline{\Omega}$ est un ouvert contenant F_2. Cela conclut.

4. Soit $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}^N$. Montrons qu'on peut en extraire un recouvrement localement fini.

On fixe une norme quelconque sur $\mathbb{R}^N$, notée $||.||$.
Pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, $\overline{B}(0,M)$ est un compact. Puisque $\overline{B}(0,M) \subset \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$, il existe $\alpha_1^M, ..., \alpha_{s_M}^M$ tels que $\overline{B}(0,M) \subset \bigcup\limits_{t \leq s_M} U_{\alpha_t^M}$.
Posons, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \leq s_M$:

$$V_{M,t} = U_{\alpha_t^M} \cap \{x \text{ tq } ||x|| > M-1\}$$

Les $V_{M,t}$ sont des ouverts. La famille $\{V_{M,t}\}$ est un raffinement de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ puisque, pour tous M, t, $V_{M,t} \subset U_{\alpha_t^M}$. De plus, $\bigcup\limits_{M,t} V_{M,t} = \mathbb{R}^N$. En effet, si $x \in \mathbb{R}^N$ et si M est l'entier tel que $M-1 < ||x|| \leq M$, alors :

$$\begin{aligned}
x &\in \overline{B}(x,M) \cap \{x \text{ tq } ||x|| > M-1\} \\
&\subset \left(\bigcup_{t \leq s_M} U_{\alpha_t^M} \right) \cap \{x \text{ tq } ||x|| > M-1\} \\
&= \bigcup_{t \leq s_M} V_{M,t}
\end{aligned}$$

Montrons enfin que la famille $\{V_{M,t}\}$ est localement finie. Soit $x \in \mathbb{R}^N$ quelconque. Soit W un voisinage borné de x. Soit $M \in \mathbb{N}$ tel que $W \subset \{x \text{ tq } ||x|| \leq M-1\}$. Alors, pour tout $M' \geq M$ et tout t, $W \cap V_{M',t} = \emptyset$. Donc W n'a d'intersection non-vide qu'avec les $W_{M',t}$ pour lesquels $M' < M$, qui sont en nombre fini.