Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$4

Exercice 1 : questions diverses

1. Soient A, B des compacts de deux espaces topologiques X et Y. Soit Ω un ouvert de $X \times Y$ contenant $A \times B$. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V de X et Y tels que $A \times B \subset U \times V \subset \Omega$.

2. Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$. On définit le graphe de f par :

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \text{ tq } x \in X\} \subset X \times Y$$

a) Montrer que, si Y est séparé, le graphe de f est fermé dans $X \times Y$ pour la topologie produit si f est continue.
b) Montrer que, si Y est compact, f est continue sur $\mathcal{G}(f)$ est fermé.
c) Donner un contre-exemple à la propriété précédente dans le cas où Y n'est pas compact.

3. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que (X, d) est compact si et seulement si il n'existe pas de fonction continue non-bornée de X dans $\mathbb{R}$.
[Indication : Penser à utiliser la propriété de Tietze.]

Exercice 2 : exemples d'espaces complets

Les espaces suivants sont-ils complets ? Si non, pouvez-vous en décrire un complété ?

1. L'espace $\mathcal{P}$ des fonctions polynomiales sur $[0;1]$, muni de la norme $||P||_\infty = \sup_{[0;1]} |P(t)|$.
2. L'espace E_0 des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$.
3. L'espace E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact, avec la norme $||f||_\infty$.

Exercice 3 : exemples d'espaces compacts

Les espaces suivants sont-ils compacts ?

1. L'espace $E = [0;1]^{[0;1]}$ des fonctions de $[0;1]$ vers $[0;1]$, muni de la topologie produit ?
2. L'espace $F \subset E$ des fonctions 1-lipschitziennes, muni de la topologie induite par celle de E ?
3. L'espace $G \subset E$ des fonctions continues, muni de la topologie induite par celle de E ?

Exercice 4 : compactification de Stone-Čech

Soient X un espace topologique et $\mathcal{F}_X$ l'ensemble des fonctions continues de X vers $[0;1]$. Soit :

$$E_X = [0;1]^{\mathcal{F}_X} = \prod_{f \in \mathcal{F}_X} [0;1]$$

On définit une application $\phi : X \to E_X$ par :

$$\phi(x) = \{f(x)\}_{f \in \mathcal{F}_X}$$

1. Montrer que, si E_X est muni de la topologie produit, ϕ est une application continue.

2. Dans cette question, on suppose que X est un espace normal et séparé.
a) Montrer que ϕ est injective.
b) Montrer que ϕ est ouverte vers son image, c'est-à-dire que l'image par ϕ d'un ensemble ouvert de X est un ensemble ouvert de $\phi(X)$.
c) En déduire que X est homéomorphe à un sous-ensemble de $[0;1]^{\mathcal{F}_X}$.

3. On ne suppose maintenant plus que X est normal. On pose :

$$Y_X = \overline{\phi(X)}$$

Montrer que Y_X est compact et que $\phi(X)$ est dense dans Y_X.

4. Nous allons montrer que la propriété suivante est vraie : si Z est un espace topologique compact et $g : X \to Z$ est une fonction continue, alors il existe une fonction $h : Y_X \to Z$ continue telle que $g = h \circ \phi$.
a) On suppose d'abord que $Z = [0;1]^I$, muni de la topologie produit, pour un certain ensemble I. On note, pour tout $i \in I$, $p_i : Z \to [0;1]$ la projection sur la i-ème coordonnée.
Montrer que $h : \{u_f\}_{f \in \mathcal{F}_X} \in Y_X \to \{u_{p_i \circ g}\}_{i \in I} \in Z$ vérifie les propriétés voulues.
b) Montrer la propriété pour Z sous-ensemble compact de $[0;1]^I$ (avec la topologie induite).
c) Montrer la propriété pour tous les compacts Z.
d) Montrer qu'une telle fonction h est unique.
On appelle Y_X la *compactification de Stone-Čech* de X.

Exercice 5 : un théorème de dynamique topologique
Soit (K, d) un espace métrique compact. Soit $f : K \to K$ continue.
On dit qu'un point $x \in K$ est *récurrent* s'il existe $(\phi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que :

$$f^{\phi(n)}(x) \to x \qquad \text{quand } n \to +\infty$$

1. a) Montrer l'existence d'un fermé F non-vide de K qui soit stable par f et minimal au sens de l'inclusion.
[Indication : Utiliser le lemme de Zorn.]
b) En déduire qu'il existe au moins un point récurrent (théorème dû à Birkhoff).
[Indication : Regarder l'ensemble $F_k = \overline{\{f^n(x), n \geq k\}}$ pour $x \in F$.]

2. On dit qu'un point $x \in K$ est *non-errant* si, pour tout voisinage U de x, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.
On note $R(f)$ l'ensemble des points récurrents de f et $NE(f)$ celui des points non-errants.
a) Montrer que $\overline{R(f)} \subset NE(f)$.
b) Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

Exercice 6
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension infinie. Soit $K \subset E$ compact.

1. On note $\mathcal{S}$ la sphère unité de E. Montrer qu'elle n'est pas compacte. [On pourra utiliser le fait que la boule unité ne l'est pas.]

2. Soit $x_0 \in E - K$ quelconque. Montrer qu'il existe $y \in \mathcal{S}$ tel que $(x_0 + \mathbb{R}^+ y) \cap K = \emptyset$.

3. Montrer que $E - K$ est connexe par arcs.