Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$5

Exercice 1 : questions diverses

1. a) Montrer que $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
b) [Plus difficile] Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

2. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ?
a) Un produit d'espaces connexes est connexe.
b) Un produit d'espaces connexes par arcs est connexe par arcs.
c) Un produit d'espaces localement connexes est localement connexe.

3. Soit (X, d) un espace de longueur. Montrer que X est localement connexe par arcs.

4. Soit X un espace topologique. On considère les deux relations d'équivalences suivantes :
(i) $\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y$ si x et y appartiennent à la même composante connexe.
(ii) $\forall x, y \in X, x\mathcal{S}y$ si, pour toute fonction $f : X \to \{0, 1\}$ continue, $f(x) = f(y)$.
a) Montrer que ces définitions sont équivalentes lorsque X est localement connexe.
b) Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble suivant :

$$E = \{(0, 0)\} \cup \{(0, 1)\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) \text{ tq } n \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Déterminer la classe d'équivalence de $(0, 0)$ pour les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.

Exercice 2 : connexité de la topologie cofinie

Soit X un ensemble infini. On apelle *topologie cofinie* sur X la topologie dont les ouverts sont l'ensemble vide et les ensembles de complémentaire fini.

1. Montrer que X est connexe et localement connexe.

2. Dans cette question, on va montrer que, si $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition disjointe de $[0; 1]$ en fermés, alors tous les F_n sont vides, sauf l'un qui vaut $[0; 1]$.
Posons $G = \bigcup\limits_n \partial F_n$, où ∂F_n désigne le bord de F_n dans $[0; 1]$.
a) Montrer que G est fermé dans $[0; 1]$.
b) Montrer que, si G est non-vide, il existe $a < b \in \mathbb{R}$ tels que $]a; b[\cap G$ est non-vide et inclus dans l'un des F_n.
c) Montrer qu'il est impossible que G soit non-vide. Conclure.
d) Montrer que, si X est dénombrable, X n'est pas connexe par arcs.

3. On suppose ici que X n'est pas dénombrable. On suppose de plus qu'il existe une injection de $\mathbb{R}$ dans X (c'est toujours le cas si on admet l'hypothèse du continu).
Montrer que X est connexe par arcs.

Exercice 3 : retour de la distance de Hausdorff
Soit (X, d) un espace métrique compact. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées non vides de X. Pour toute $A \in \mathcal{F}$, on pose :

$$\begin{aligned} \phi_A : & X \to \mathbb{R} \\ & x \to d(x, A) \end{aligned}$$

Pour toutes $A, B \in \mathcal{F}$, on note $\delta(A, B) = ||\phi_A - \phi_B||_\infty$. On a vu au cours du premier TD que δ était une distance sur $\mathcal{F}$, appelée distance de Hausdorff.

1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que $(\phi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ continue, lorsque $n \to +\infty$.
Soit $A = f^{-1}(\{0\})$.
a) Soit $x \in X$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in A_n$ tel que $\phi_{A_n}(x) = d(x, a_n)$. En déduire qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) = f(x)$. (Cela montre en particulier que $A \neq \emptyset$.)
b) Montrer que f est 1-lipschitzienne et en déduire que $f \leq \phi_A$.
c) Montrer que $f = \phi_A$.

2. À l'aide du théorème d'Ascoli, montrer que $(\mathcal{F}, \delta)$ est compact.

Exercice 4 : théorème de Peano
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On note $|.|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
Soient $\eta, R > 0$ et $U = [0; \eta] \times \overline{B}(x_0, R) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Soit $M > 0$ une borne de $|f|$ sur U.
On va démontrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que le problème

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X(t)) \qquad X(0) = x_0$$

admet une solution $X \in \mathcal{C}^1([0; \epsilon], \mathbb{R}^n)$.

1. Soit $\epsilon = \min(\eta, R/M)$. Montrer que, pour tout $\delta > 0$, il existe une fonction continue X_δ : $[0; \epsilon] \to \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que :
– $X_\delta(0) = x_0$
– $\forall t \in [0; \epsilon]$, si X_δ est dérivable en t, alors $|\frac{dX_\delta}{dt}(t) - f(t, X_\delta(t))| \leq \delta$.
[Indication : Utiliser la « méthode d'Euler ».]

2. Montrer qu'il existe une suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $(X_{\delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément dans $\mathcal{C}^0([0; \epsilon], \mathbb{R}^n)$ vers une fonction $X : [0; \epsilon] \to \mathbb{R}^n$.

3. Montrer que X est une solution de l'équation.

Exercice 5 : partitions de l'unité
Soit X un espace topologique compact.

1. Montrer que si $\Omega_1, ..., \Omega_n$ sont des ouverts de X dont l'union vaut X, alors il existe $V_1, ..., V_n$ des ouverts de X dont l'union vaut X tels que, pour tout k, $\overline{V}_k \subset \Omega_k$.

2. Soit $U_1, ..., U_n$ une famille finie d'ouverts de X telle que $\bigcup_k U_k = X$.
Montrer qu'il existe $\phi_1, ..., \phi_n : X \to \mathbb{R}^+$ des fonctions continues telles que :

(i) $\forall k \leq n$, $\overline{\{x \in X \text{ tq } \phi_k(x) \neq 0\}} \subset U_k$
(ii) $\forall x \in X$, $\sum\limits_{k \leq n} \phi_k(x) = 1$
On appelle $\phi_1, ..., \phi_n$ une *partition de l'unité* subordonnée à $\{U_k\}_{k \leq n}$.
[Remarque : la même propriété est vraie dans le cadre plus général des espaces paracompacts, lorsque le recouvrement ouvert n'est plus fini mais seulement localement fini. Pouvez-vous la démontrer ? La définition et une propriété importante des espaces paracompacts se trouvent dans le TD3.]

Exercice 6 : un théorème de plongement
Soit X un espace topologique.
On dit que $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement ouvert de X si c'est une famille d'ouverts de X telle que $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha = X$.
On dit que $\mathcal{U}$ est d'*ordre fini* s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in X$, il existe au plus m valeurs différentes de α pour lesquelles $x \in U_\alpha$. On appelle *ordre* de $\mathcal{U}$ la plus petite valeur de m pour laquelle cette propriété est vraie.
On dit qu'un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ *raffine* le recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ si, pour tout $\beta \in B$, il existe $\alpha \in A$ tel que $V_\beta \subset U_\alpha$.
On dit que X est de *dimension topologique finie* s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que tout recouvrement ouvert de X se raffine en un recouvrement d'ordre au plus $m+1$. On appelle *dimension topologique* de X le plus petit ouvert m pour lequel cette propriété est vraie.

On suppose maintenant que (X, d) est un espace métrique compact d'ordre fini m. Nous allons montrer qu'il existe un plongement de X dans $\mathbb{R}^{2m+1}$, c'est-à-dire une application $\phi : X \to \mathbb{R}^{2m+1}$ continue et injective qui réalise un homéomorphisme de X sur $\phi(X)$.

1. Pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}^{2m+1}$, on pose $\Delta(f) = \sup\{\text{diam}\,(f^{-1}(\{z\}))\}_{z \in f(X)}$.
Pour tout $\epsilon > 0$, soit :
$$U_\epsilon = \{f \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}^{2m+1}) \text{ tq } \Delta(f) < \epsilon\}$$
On suppose temporairement que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} U_{1/n} \neq \emptyset$. Montrer la propriété demandée.

2. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, U_ϵ est un ouvert de $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}^{2m+1})$ muni de la norme uniforme.

3. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Nous allons montrer que U_ϵ est dense dans $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}^{2m+1})$.
Soient $f \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}^{2m+1})$ et $\delta > 0$ quelconques. On va construire $g \in U_\epsilon$ tel que $||f - g||_\infty < \delta$.
a) Montrer qu'il existe $\{U_1, ..., U_n\}$ un recouvrement ouvert fini de X tel que :
 (i) diam $U_i < \epsilon/2$ pour tout $i \leq n$
 (ii) diam $f(U_i) < \delta/2$ pour tout $i \leq n$
 (iii) $\{U_1, ..., U_n\}$ est d'ordre au plus $m+1$
b) Fixons, pour tout $i \leq n$, un point $x_i \in U_i$. Montrer qu'il existe $z_1, ..., z_n \in \mathbb{R}^{2m+1}$ un ensemble vérifiant les deux propriétés suivantes :
 (i) $||f(x_i) - z_i|| < \delta/2$
 (ii) Pour tous $i_1, ..., i_{2m+2} \leq n$, la famille $((z_{i_1}, 1), ..., (z_{i_{2m+2}}, 1))$ est libre dans $\mathbb{R}^{2m+2}$.
(La notation $(z_k, 1)$ désigne le vecteur z_k, auquel on ajouté une dernière coordonnée égale à 1 pour en faire un élément de $\mathbb{R}^{2m+2}$.)

c) Soit $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ une partition de l'unité subordonnée à $\{U_1, ..., U_n\}$. On pose, pour tout $x \in X$:

$$g(x) = \sum_{i \leq n} \phi_i(x) z_i$$

Montrer que $||f - g||_\infty < \delta$.
d) Montrer que $\Delta(g) < \epsilon$.

4. Conclure.

Exercice 7 : deux propriétés des espaces de longueur

1. Soit (X, d) un espace métrique complet. Montrer qu'il s'agit d'un espace de longueur si et seulement si, pour tous $x, y \in X$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $z \in X$ tel que :

$$d(x, z) < \frac{d(x, y)}{2} + \epsilon \quad \text{et} \quad d(z, y) < \frac{d(x, y)}{2} + \epsilon$$

2. Soit (X, d) un espace métrique.
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n : [0; 1] \to X$ une fonction continue telle que γ_n est une courbe de longueur minimale entre $\gamma_n(0)$ et $\gamma_n(1)$.
On suppose que $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue $\gamma_\infty : [0; 1] \to X$.
a) Montrer que, si (X, d) est un espace de longueur, alors γ_∞ est une courbe de longueur minimale entre $\gamma_\infty(0)$ et $\gamma_\infty(1)$.
b) Donner un contre-exemple pour le cas où (X, d) n'est pas un espace de longueur.