Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$5

Corrigé

Exercice 1

1. a) Si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme, alors $\phi : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}^2 - \{\phi(0)\}$ est aussi un homéomorphisme. Mais $\mathbb{R} - \{0\}$ n'est pas connexe alors que $\mathbb{R}^2 - \{\phi(0)\}$ (le plan privé d'un point) est connexe. Ce n'est pas possible.
b) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une injection continue. Montrons que ce n'est pas une surjection.

Lemme 1.1. *Pour tout $K > 0$, $\phi([-K; K])$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^2$.*

Démonstration. Posons $\Omega = \phi([-K; K])$ et supposons par l'absurde que cet ensemble n'est pas d'intérieur vide.
Soit $y_0 \in \mathring{\Omega}$. Puisque $\mathring{\Omega}$ est infini (c'est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^2$; il contient donc une boule ouverte), on peut supposer que $y_0 \neq \phi(-K)$ et $y_0 \neq \phi(K)$. Il existe donc $x_0 \in]-K; K[$ tel que $y_0 = \phi(x_0)$.
Montrons que l'ensemble $\Omega - \{y_0\}$ est connexe. Soit $r > 0$ tel que $B(y_0, r) \subset \Omega$. Si $\Omega - \{y_0\} = F_1 \cap F_2$ avec F_1, F_2 deux fermés disjoints de $\Omega - \{y_0\}$, $F_1 \cap (B(y_0, r) - \{y_0\}) = \emptyset$ ou $F_2 \cap (B(y_0, r) - \{y_0\}) = \emptyset$ (car $B(y_0, r) - \{y_0\}$ est connexe). Supposons que $F_1 \cap (B(y_0, r) - \{y_0\}) = \emptyset$. Alors on peut vérifier que F_1 et $F_2 \cup \{y_0\}$ sont deux fermés disjoints de Ω dont l'union est Ω. Puisque Ω est connexe (c'est l'image d'un connexe par une fonction continue), l'un des deux fermés est vide. Donc $F_1 = \emptyset$. Donc $\Omega - \{y_0\}$ est connexe.
L'application $\phi : [-K; K] \to \Omega$ réalise un homéomorphisme (c'est une bijection dont l'ensemble de départ est compact). Donc $\phi : ([-K; K] - \{x_0\}) \to (\Omega - \{y_0\})$ est aussi un homéomorphisme, entre un espace non-connexe et un espace connexe. C'est absurde. □

Comme $\phi(\mathbb{R}) = \bigcup_n \phi([-n; n])$, c'est une union de fermés d'intérieur vide. C'est donc un ensemble d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^2$. Donc $\phi(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}^2$.

2. a) C'est vrai. La démonstration est dans le cours.
b) C'est vrai. Supposons que, pour tout $i \in I$, A_i est un espace topologique connexe par arcs. Notons $B = \prod_{i \in I} A_i$ et montrons que B est connexe par arcs.
Soient $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ dans B. Pour tout i, puisque A_i est connexe par arcs, il existe $\phi_i : [0; 1] \to A_i$ continue telle que $\phi_i(0) = x_i$ et $\phi_i(1) = y_i$.
Posons $\phi(t) = (\phi_i(t))_{i \in I}$ pour tout $t \in [0; 1]$. C'est une application continue de $[0; 1]$ dans B car sa composée avec chacune des projections élémentaires est continue. De plus, $\phi(0) = (x_i)_{i \in I}$ et $\phi(1) = (y_i)_{i \in I}$.
c) C'est faux. Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = \{0, 1\}$, muni de la topologie discrète. Pour tout k, A_k est localement connexe. Montrons que $B = \prod_k A_k$ ne l'est pas.

On note $\pi_s : B \to A_s$ les projections canoniques.
Soit $X = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in B$ quelconque. Montrons que X n'admet aucun voisinage connexe. En effet, soit V un voisinage de X dans B. Il existe $k_1, ..., k_s$ un nombre fini d'indices et $U_1, ..., U_s$ des ouverts de $\{0,1\}$ tels que :

$$\pi_{k_1}^{-1}(U_1) \cap ... \cap \pi_{k_s}^{-1}(U_s) \subset V$$

Soit K un indice différent de chacun des $k_1, ..., k_s$. Alors $V \cap \pi_K^{-1}(\{0\})$ et $V \cap \pi_K^{-1}(\{1\})$ sont des ouverts disjoints de V dont l'union vaut V. Chacun des deux est non-vide car :

$$\emptyset \neq \left(\pi_{k_1}^{-1}(U_1) \cap ... \cap \pi_{k_s}^{-1}(U_s)\right) \cap \pi_K^{-1}(\{0\}) \subset V \cap \pi_K^{-1}(\{0\})$$
$$\emptyset \neq \left(\pi_{k_1}^{-1}(U_1) \cap ... \cap \pi_{k_s}^{-1}(U_s)\right) \cap \pi_K^{-1}(\{1\}) \subset V \cap \pi_K^{-1}(\{1\})$$

Donc V n'est pas connexe.

3. Soit $x \in X$. Soit $r > 0$ quelconque. Montrons que $B(x,r)$ est connexe par arcs.
Il suffit de montrer que, pour tout $y \in B(x,r)$, il existe $\phi : [0;1] \to B(x,r)$ continue telle que $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$.
Puisque $d(x,y) < r$ et puisque la distance de x à y est la borne inférieure des longueurs des courbes joignant x à y, il existe $\phi : [0;1] \to X$ continue telle que $\phi(0) = x$, $\phi(1) = y$ et $\mathcal{L}(\phi) < r$.
Alors, pour tout $t \in [0;1]$, $d(x, \phi(t)) \leq \mathcal{L}(\phi_{|[0;t]}) \leq \mathcal{L}(\phi) < r$ donc $\phi(t) \in B(x,r)$.

4. a) Remarquons d'abord que $x\mathcal{R}y$ implique $x\mathcal{S}y$, même lorsque X n'est pas localement connexe. En effet, si x et y appartiennent à la même composante connexe F, toute fonction $f : X \to \{0,1\}$ continue est constante sur F, puisque F est connexe donc $f(x) = f(y)$.
Il faut donc montrer que, si X est localement connexe, $\neg(x\mathcal{R}y) \Rightarrow \neg(x\mathcal{S}y)$. Soient donc x et y appartenant à deux composantes connexes différentes. Soit F la composante connexe de x. C'est un fermé et c'est aussi un ouvert (puisque X est localement connexe). L'application $1_F : X \to \{0,1\}$ est donc continue. Puisque $1_F(x) = 1 \neq 0 = 1_F(y)$, on n'a pas $x\mathcal{S}y$.
b) Pour la relation $\mathcal{R}$, la classe d'équivalence de $(0,0)$ est le singleton $\{(0,0)\}$. En effet, notons F la classe d'équivalence du point.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F \cap \{(x,y) \text{ tq } x \leq 1/(n+1)\}$ et $F \cap \{(x,y) \text{ tq } x \geq 1/n\}$ est une partition de F en deux fermés disjoints. L'un des deux fermés est vide ; c'est nécessairement le deuxième car le premier contient $(0,0)$.
On déduit de ce raisonnement que, pour tout $(x,y) \in F$, on doit avoir $x = 0$. On a donc $F = \{(0,0)\}$ ou $F = \{(0,0),(0,1)\}$. Comme F est connexe, $F = \{(0,0)\}$.
Pour la relation $\mathcal{S}$, la classe d'équivalence de $(0,0)$ est $\{(0,0),(0,1)\}$. En effet, notons-la G.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $\phi : E \to \{0,1\}$ telle que $\phi(x,y) = 0$ si $x < 1/n$ et $\phi(x,y) = 1$ si $x \geq 1/n$ est continue sur E. On en déduit que, si $(x,y) \in E$ avec $x \geq 1/n$, alors on n'a pas $(x,y)\mathcal{S}(0,0)$.
On doit donc avoir $G \subset \{(0,0),(0,1)\}$. Il suffit pour conclure de montrer que $(0,0)\mathcal{S}(0,1)$.
Soit $f : E \to \{0,1\}$ une fonction continue quelconque. Par continuité de f en $(0,0)$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, $f(1/n, 0) = f(0,0)$. Puisque $\{(1/n, y) \text{ tq } y \in \mathbb{R}\}$ est connexe pour tout n, l'application f est constante sur chacun de ces ensembles. Donc, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq N$, $f(1/n, y) = f(0,0)$. En particulier, pour tout $n \geq N$, $f(1/n, 1) = f(0,0)$. Par continuité de f, $f(0,1) = f(0,0)$.

Exercice 2

1. Tout ouvert U de X est connexe. En effet, si $U = U_1 \cup U_2$ avec U_1 et U_2 deux ouverts disjoints de U, alors U_1 et U_2 sont des ouverts de X. Ils sont d'intersection vide donc l'un des deux est vide (deux ouverts non-vides de la topologie cofinie sur un ensemble infini sont toujours d'intersection non-vide).
En particulier, X est connexe.
N'importe quel voisinage ouvert de n'importe quel point de X est connexe donc X est localement connexe.
2. a) $G = [0;1] - (\bigcup\limits_n \mathring{F}_n)$
Donc G est le complémentaire d'un ouvert.
b) G est fermé dans $[0;1]$ qui est complet. Donc G est complet. Supposons G non-vide.
Puisque G est une union dénombrable de fermés et puisque G n'est pas d'intérieur vide dans lui-même, il existe n tel que ∂F_n n'est pas d'intérieur vide dans G. Soit $x_0 \in \partial F_n$ un point de l'intérieur.
Par définition de l'intérieur, il existe un voisinage de x_0 dans G qui est inclus dans ∂F_n. Il existe donc $a < b$ des réels tels que $x_0 \in]a;b[\cap G \subset \partial F_n \subset F_n$.
c) Supposons que G est non-vide et soient a, b, n comme à la question précédente.
Pour tout $m \neq n$, $]a;b[\cap F_m = \emptyset$. En effet, $]a;b[\cap F_m$ est un fermé de $]a;b[\cap [0;1]$ qui n'est pas égal à $]a;b[\cap [0;1]$ tout entier (puisque $]a;b[$ intersecte F_n qui est disjoint de F_m). C'est aussi un ouvert puisque le bord de cet ouvert dans $]a;b[\cap [0;1]$ vaut $\partial F_m \cap]a;b[= \emptyset$. Comme $]a;b[\cap [0;1]$ est connexe, $]a;b[\cap F_m = \emptyset$.
Donc, puisque $]a;b[\cap [0;1] = \bigcup\limits_m (F_m \cap]a;b[)$, on doit avoir $]a;b[\cap [0;1] \subset F_n$. Mais alors $]a;b[\cap \partial F_n = \emptyset$, ce qui est en contradiction avec la définition de a, b, n.
C'est absurde.
Pour tout n, on a donc $\partial F_n = \emptyset$. Puisque $[0;1]$ est connexe, cela implique $F_n = \emptyset$ ou $F_n = [0;1]$. D'où le résultat.
d) D'après ce qu'on vient de voir, toutes les applications continues de $[0;1]$ dans X sont constantes. En effet, si $\phi : [0;1] \to X$ est continue, $\{\phi^{-1}(x)\}_{x \in X}$ forme une partition dénombrable de $[0;1]$ en fermés disjoints. Tous les éléments de cette partition doivent donc être vides sauf un.
Donc X n'est pas connexe par arcs.

3. Soient a, b quelconques. S'il existe une injection de $\mathbb{R}$ dans X, il existe aussi une injection de $\phi :]0;1[\to X$. On pose $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$.
L'application ϕ est continue car l'antécédant par ϕ de tout fermé de X (c'est-à-dire de tout ensemble fini) est un ensemble fini donc un fermé de $[0;1]$.

Exercice 3

1. a) L'existence de a_n est une conséquence de la compacité de A_n, partie fermée d'un compact. Quitte à extraire, on peut supposer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément $a \in X$. Pour tout n, $\phi_{A_n}(a_n) = 0$. Puisque $\phi_{A_n} \to f$ et $a_n \to a$, $f(a) = 0$ donc $a \in A$.
Puisque $\phi_{A_n}(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$ et $d(x, a_n) \to d(x, a)$, on a bien $f(x) = d(x, a)$.

b) La fonction f est 1-lipschitzienne car c'est une limite de fonctions 1-lipschitziennes (et l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes est fermé pour la norme uniforme).
Pour tout $x \in X$ et tout $a \in A$, $f(x) \leq f(a) + d(x,a) = d(x,a)$. En prenant la borne inférieure sur a, on obtient $f(x) \leq d(x,A) = \phi_A(x)$.
c) D'après a), $f(x) \geq \inf_{a \in A} d(x,a) = \phi_A(x)$. D'après b), cela implique $f = \phi_A$.

2. L'ensemble $\{\phi_A\}_{A \in \mathcal{F}}$ est fermé, d'après la question 1. Il est équicontinu (les fonctions ϕ_A sont toutes 1-lipschitziennes) et les fonctions ϕ_A sont uniformément bornées (par le diamètre de X) donc l'image des ϕ_A est d'adhérence compacte dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\{\phi_A\}_{A \in \mathcal{F}}$ est donc compact pour la norme uniforme, d'après le théorème d'Ascoli. Puisque $(\mathcal{F}, \delta)$ est isométrique à $(\{\phi_A\}_A, ||.||_\infty)$, l'ensemble $(\mathcal{F}, \delta)$ est également compact.

Exercice 4

1. Soit N tel que, si $|t - t'| \leq \epsilon/N$ et $|x - x'| \leq \epsilon M/N$, alors :

$$|f(t,x) - f(t',x')| \leq \delta$$

Un tel N existe car f est uniformément continue, d'après le théorème de Heine.
On définit X_δ sur $\left[0; \frac{k}{N}\epsilon\right]$ par récurrence sur k.
– Pour $k = 0$, on pose $X_\delta(0) = x_0$.
– Si X_δ est définie sur $\left[0; \frac{k}{N}\epsilon\right]$, on pose :

$$X_\delta(t) = X_\delta\left(\frac{k}{N}\epsilon\right) + \left(t - \frac{k}{N}\epsilon\right) f\left(\frac{k}{N}\epsilon, X_\delta\left(\frac{k}{N}\epsilon\right)\right) \qquad \forall t \in \left[\frac{k}{N}\epsilon; \frac{k+1}{N}\epsilon\right]$$

On peut montrer par récurrence que, pour tout $t \in \left[\frac{k}{N}\epsilon; \frac{k+1}{N}\epsilon\right]$:

$$|X_\delta(t) - x_0| \leq tM$$

En particulier, on a toujours $|X_\delta(t) - x_0| \leq R$ et donc la définition est valide.
La fonction est bien continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. De plus, pour tout k et tout $t \in \left[\frac{k}{N}\epsilon; \frac{k+1}{N}\epsilon\right]$:

$$\left|X_\delta(t) - X_\delta\left(\frac{k}{N}\epsilon\right)\right| \leq \frac{\epsilon}{N}M$$

Donc, si X_δ est dérivable en t :

$$|X'_\delta(t) - f(t, X_\delta(t))| = \left|f\left(\frac{k}{N}\epsilon, X_\delta\left(\frac{k}{N}\epsilon\right)\right) - f(t, X_\delta(t))\right| \leq \delta$$

2. Considérons $\{X_\delta\}_{0<\delta\leq 1} \subset \mathcal{C}^0([0;\epsilon], \mathbb{R}^n)$. Cette famille de fonctions est équicontinue.
En effet, pour tout $\delta \in]0;1]$, la dérivée de X_δ existe partout sauf en un nombre fini de points et, partout où elle existe, elle est inférieure à $M + \delta \leq M + 1$. Comme X_δ est de plus continue, on en déduit que X_δ est $(M+1)$-lipschitzienne.
La famille $\{X_\delta\}$ est de plus uniformément bornée (par R, puisque $(t, X_\delta(t))$ reste dans l'ensemble de définition de f) donc son image est d'adhérence compacte dans $\mathbb{R}$.

D'après le théorème d'Ascoli, cette famille est donc d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}^0([0;\epsilon],\mathbb{R}^n)$ et la suite $(X_{1/n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une sous-suite convergente au sens de la norme uniforme.
3. Pour tout t, $X(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} X_{\delta_n}(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^t X'_{\delta_n}(t)dt$.
Pour tout n, $\left|\int_0^t X'_{\delta_n}(t)dt - \int_0^t f(t, X_{\delta_n}(t))dt\right| \leq \delta_n t \leq \delta_n \epsilon$.
De plus, $t \to f(t, X_{\delta_n}(t))$ converge uniformément vers $t \to f(t, X(t))$ (car f est uniformément continue) donc :

$$X(t) = \int_0^t f(t, X(t))dt$$

La fonction X est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $t \to f(t, X(t))$.

Exercice 5

1. Pour tout x, il existe k_x tel que $x \in \Omega_{k_x}$. Puisque $\{x\}$ et $X - \Omega_{k_x}$ sont des fermés disjoints de X et puisque X est normal, il existe U_x et U'_x des ouverts disjoints tels que $x \in U_x$ et $X - \Omega_{k_x} \subset U'_x$.
On a alors $\overline{U}_x \subset X - U'_x \subset \Omega_{k_x}$.
Puisque $\bigcup\limits_{x\in X} U_x = X$ et X est compact, il existe $x_1, ..., x_m$ tels que $\bigcup\limits_{s\leq m} U_{x_s} = X$.
Posons, pour tout $k \leq n$, $V_k = \bigcup\limits_{k_{x_s}=k} U_{x_s}$. Les V_k sont bien un recouvrement ouvert de X et pour tout k :

$$\overline{V}_k = \bigcup_{k_{x_s}=k} \overline{U}_{x_s} \subset \Omega_k$$

2. Soient $V_1, ..., V_n$ et $W_1, ..., W_n$ deux recouvrements de X par des ouverts tels que, pour tout $k \leq n$, $\overline{W}_k \subset V_k \subset \overline{V}_k \subset U_k$. Leur existence est garantie d'après la question précédente.
Soit, pour tout k, $\psi_k : X \to [0;1]$ une fonction continue telle que $\psi_k = 1$ sur $\overline{W}_k$ et $\psi_k = 0$ sur $X - V_k$. Elle existe puisque X est normal.
La fonction $P : x \to \sum\limits_k \psi_k(x)$ est continue et strictement positive sur X. En effet, pour tout $x \in X$, $x \in W_l$ pour un certain $l \leq n$ donc $P(x) \geq \psi_l(x) = 1$.
Posons, pour tout k, $\phi_k(x) = \psi_k(x)/P(x)$.
Pour tout $k \leq n$, $\phi_k(x) = 0$ si $x \in X - V_k$ donc $\overline{\{x \in X \text{ tq } \phi_k(x) \neq 0\}} \subset \overline{V}_k \subset U_k$.
Pour tout $x \in X$, $\sum\limits_{k\leq n} \phi_k(x) = P(x)/P(x) = 1$.

Exercice 6

1. Soit $\phi \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} U_{1/n}$. C'est une application injective : pour tout z, $\operatorname{diam}(f^{-1}(\{z\})) \leq \Delta(\phi) = 0$ donc $f^{-1}(z)$ contient au plus un point. Comme elle est continue et comme X est compact, elle réalise un homéomorphisme sur son image.

2. Montrons que le complémentaire est fermé.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}^{2m+1}) - U_\epsilon$, convergeant uniformément vers une limite f_∞.
Pour tout n, il existe $z_n \in X$ tel que $\operatorname{diam}(f_n^{-1}(\{z_n\})) \geq \epsilon - 1/(n+1)$. Il existe donc $a_n, b_n \in X$ tels que $d(a_n, b_n) \geq \epsilon - 1/(n+1)$ et $f_n(a_n) = f_n(b_n) = z_n$.

Il existe $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction telle que $(a_{\theta(n)})_n$ et $(b_{\theta(n)})_n$ convergent vers des limites a_∞ et b_∞. Alors $f_\infty(a_\infty) = f_\infty(b_\infty)$ (car $f_n(a_n) \to f_\infty(a_\infty)$ et $f_n(b_n) \to f_\infty(b_\infty)$). De plus, $d(a_\infty, b_\infty) \geq \epsilon$.
Donc $f_\infty \notin U_\epsilon$.
3. a) Puisque f est continue, pour tout x, il existe V_x un voisinage de x tel que :
– diam $V_x < \epsilon/2$
– diam $f(V_x) < \delta/2$
Puisque X est compact, on peut en extraire un recouvrement fini. On peut raffiner ce recouvrement en un recouvrement d'ordre au plus $m+1$, puis encore ce recouvrement en un recouvrement fini, de nouveau par compacité.
Le recouvrement $\{U_1, ..., U_n\}$ qu'on obtient est un raffinement de $\{V_x\}_{x\in X}$. Il vérifie donc les propriétés (i) et (ii). De plus, par construction, il vérifie (iii).
b) Pour tout $I = \{i_1, ..., i_{2m+2}\} \subset \{1, ..., n\}$, notons :

$$Z_I = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^{(2m+1)\times n} \text{ tq } \det\big((z_{i_1}, 1), ..., (z_{i_{2m+2}}, 1)\big) \neq 0\}$$

Les Z_I sont des ouverts. De plus, ils sont denses (c'est une conséquence du fait que $(z_1, ..., z_n) \to \det((z_{i_1}, 1), ..., (z_{i_{2m+2}}, 1))$ est une fonction polynomiale non-nulle ; cela peut aussi se déduire de la densité de $\mathcal{GL}_{2m+2}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2m+2}(\mathbb{R})$).
L'intersection des Z_I est donc également dense dans $\mathbb{R}^{(2m+1)\times n}$, par le théorème de Baire.
L'ensemble $B(f(x_1), \delta/2) \times ... \times B(f(x_n), \delta/2)$ est donc d'intersection non-vide avec $\bigcap_I Z_I$. Un point dans l'intersection vérifie (i) et (ii).
c) Soit $x \in X$ quelconque. Soient $i_1, ..., i_s$ les indices tels que $x \in U_{i_k}$ pour tout $k \leq s$. Si j n'est pas égal à l'un des i_k, $\phi_j(x) = 0$, puisque $\phi_j = 0$ en-dehors de U_j. Donc :

$$\begin{aligned}
||g(x) - f(x)|| &= ||\left(\sum_{k\leq s} \phi_{i_k}(x) z_{i_k}\right) - f(x)|| \\
&= ||\sum_{k\leq s} \phi_{i_k}(x)(z_{i_k} - f(x))|| \\
&\leq ||\sum_{k\leq s} \phi_{i_k}(x)(z_{i_k} - f(x_{i_k}))|| + ||\sum_{k\leq s} \phi_{i_k}(x)(f(x) - f(x_{i_k}))|| \\
&< \sum_{k\leq s} \phi_{i_k}(x)(\delta/2 + \delta/2) = \delta
\end{aligned}$$

(Le deuxième $\delta/2$ provient du fait que x et x_{i_k} appartiennent à U_{i_k} et diam $f(U_{i_k}) < \delta/2$.)
d) Soit $z \in \mathbb{R}^{2m+1}$ quelconque. Soient $x, x' \in g^{-1}(z)$. Montrons que $d(x, x') < \epsilon/2$.
Il suffit de montrer qu'il existe j tel que $x, x' \in U_j$. En effet, on pourra alors conclure en utilisant le fait que $d(x, x') \leq$ diam $U_j < \epsilon/2$.
Soient $i_1, ..., i_s$ les indices tels que $x \in U_{i_k}$ pour tout $k \leq s$ et $i'_1, ..., i'_{s'}$ ceux tels que $x' \in U_{i'_k}$ pour tout $k \leq s'$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'ils sont tous différents.
Le recouvrement étant d'ordre au plus $m+1$, on a $s, s' \leq m+1$.
Le $(s+s')$-uplet $(\phi_{i_1}(x), ..., \phi_{i_s}(x), -\phi_{i'_1}(x'), ..., -\phi_{i'_{s'}}(x'))$ a la somme de ses éléments égale à 0 puisque $\sum_k \phi_{i_k}(x) = 1 = \sum_{k'} \phi_{i'_{k'}}(x')$.

De plus, $\sum\limits_k \phi_{i_k}(x) z_{i_k} + \sum\limits_{k'} (-\phi_{i'_{k'}}(x')) z_{i'_{k'}} = g(x) - g(x') = z - z = 0$.
D'après la condition (ii) imposée sur les $z_1, ..., z_n$, on doit donc avoir $\phi_{i_1}(x) = ... = \phi_{i'_{k'}}(x') = 0$.
C'est impossible car $\sum\limits_k \phi_{i_k}(x) = 1$.

4. Pour tout n, $U_{1/n}$ est un ouvert d'après la question 2. De plus, c'est un ensemble dense dans $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}^{2m+1})$, d'après la question 3. Puisque $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}^{2m+1})$ est un ensemble complet, le théorème de Baire nous affirme que $\bigcap\limits_n U_{1/n} \neq \emptyset$. On peut donc appliquer la question 1. et conclure.

Exercice 7

1. On montre d'abord que si la propriété est vérifiée, X est un espace de longueur.
Soient $x, y \in X$. Soit $\eta > 0$ quelconque. Il faut montrer qu'il existe $\phi : [0;1] \to X$ une application continue telle que $\phi(0) = x$, $\phi(1) = y$ et $\mathcal{L}(\phi) \leq d(x,y) + \eta$.
Soit $\epsilon > 0$ tel que $d(x,y) \prod\limits_{m>0} (1 + \epsilon 2^{-m+1}) \leq d(x,y) + \eta$ (on peut montrer son existence en passant au logarithme).
Nous allons commencer par construire récursivement ϕ sur les nombres de la forme $k2^{-n}$.

– On pose $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$.
– Soit $n \geq 0$. Si on a défini $\phi(k2^{-n})$ pour tout $k = 0, ..., 2^n$, alors on définit, pour tout $k' = 0, ..., 2^n - 1$,$\phi((2k'+1)2^{-(n+1)}) \in X$ tel que :

$$d\left(\phi(k'2^{-n}), \phi((2k'+1)2^{-(n+1)})\right) < d\left(\phi(k'2^{-n}), \phi((k'+1)2^{-n})\right) \times \left(\frac{1}{2} + \epsilon 2^{-n}\right)$$
$$d\left(\phi((2k'+1)2^{-(n+1)}), \phi((k'+1)2^{-n})\right) < d\left(\phi(k'2^{-n}), \phi((k'+1)2^{-n})\right) \times \left(\frac{1}{2} + \epsilon 2^{-n}\right)$$

Une telle définition est possible d'après la propriété qu'on a supposé que X vérifiait.
On peut montrer par récurrence que, pour tous k, n avec $k < 2^n$:

$$d\left(\phi(k2^{-n}), \phi((k+1)2^{-n})\right) \leq d(x,y) \prod_{0 \leq m < n} \left(\frac{1}{2} + \epsilon 2^{-m}\right)$$

On en déduit que pour tous k_1, k_2, n :

$$\begin{aligned} d\left(\phi(k_1 2^{-n}), \phi(k_2 2^{-n})\right) &\leq d(x,y) |k_1 - k_2| \prod_{0 \leq m < n} \left(\frac{1}{2} + \epsilon 2^{-m}\right) \\ &\leq d(x,y) \left|\frac{k_1}{2^n} - \frac{k_2}{2^n}\right| \prod_{0 \leq m < n} \left(1 + \epsilon 2^{-m+1}\right) \\ &\leq (d(x,y) + \eta) \left|\frac{k_1}{2^n} - \frac{k_2}{2^n}\right| \end{aligned}$$

La fonction ϕ ainsi définie est donc $(d(x,y)+\eta)$-lipschitzienne. En particulier, elle est continue et, puisque X est complet et l'ensemble des réels dyadiques est dense dans $[0;1]$, elle se prolonge en une fonction continue sur $[0;1]$. La fonction ϕ ainsi prolongée est toujours $(d(x,y) + \eta)$-lipschitzienne. En particulier, $\mathcal{L}(\phi) \leq d(x,y) + \eta$.

Supposons maintenant que X est un espace de longueur et montrons qu'il vérifie la propriété demandée.
On peut supposer que $d(x,y)/2+\epsilon/2<d(x,y)$.
Soit $\phi:[0;1]\to X$ une fonction continue telle que $\phi(0)=x$, $\phi(1)=y$ et $\mathcal{L}(\phi)<d(x,y)+\epsilon$.
Soit t_0 tel que $\mathcal{L}(\phi_{|[0;t_0]})=d(x,y)/2+\epsilon/2$. Il existe par le théorème des valeurs intermédiaires.
Posons $z=\phi(t_0)$. Alors $d(x,z)\leq\mathcal{L}(\phi_{|[0,t_0]})=d(x,y)/2+\epsilon/2$. De plus :

$$\begin{aligned}d(z,y)&\leq\mathcal{L}(\phi_{|[t_0,1]})\\&=\mathcal{L}(\phi)-\mathcal{L}(\phi_{|[0,t_0]})\\&\leq d(x,y)/2+\epsilon/2\end{aligned}$$

2. a) Pour tout n, $\mathcal{L}(\gamma_n)=\inf\{\mathcal{L}(\phi)\text{ tq }\phi:[0;1]\to X\text{ est continue et }\phi(0)=\gamma_n(0),\phi(1)=\gamma_n(1)\}$. Puisque X est un espace de longueur, on a donc $\mathcal{L}(\gamma_n)=d(\gamma_n(0),\gamma_n(1))$.
La longueur est semi-continue inférieurement pour la convergence uniforme sur l'espace des chemins : $\mathcal{L}(\gamma_\infty)\leq\lim_n\mathcal{L}(\gamma_n)=\lim_n d(\gamma_n(0),\gamma_n(1))=d(\gamma_\infty(0),\gamma_\infty(1))$.
On a toujours $\mathcal{L}(\gamma_\infty)\geq d(\gamma_\infty(0),\gamma_\infty(1))$, par définition de la longueur. On a donc une égalité.
b) Prenons $X=S^1\cup\left(\bigcup_n\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\text{ tq }\theta\in\left[\frac{1}{n};2\pi-\frac{1}{n}\right]\right\}\right)$. On munit cet espace de la distance induite par la distance usuelle sur $\mathbb{C}$.
Pour tout n, posons $\gamma_n:[0;1]\to X$ l'application telle que :

$$\gamma_n(t)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\exp\left(i\left(\frac{1}{n}+t\left(2\pi-\frac{2}{n}\right)\right)\right)$$

Pour tout n, γ_n est un plus court chemin entre $\gamma_n(0)$ et $\gamma_n(1)$. En revanche, elle converge vers $t\to\exp(2\pi it)$ qui n'est pas un plus court chemin entre 1 et 1.