Feuille d'exercices n^{o}6

Exercice 1 : questions diverses

1. Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On note $(\overline{E}, \overline{d})$ le complété de E. Montrer que $\overline{E}$ est naturellement muni d'une structure d'espace de Banach.

2. Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach. Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels fermés de E tels que $F_1 + F_2$ est fermé dans E.
Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $z \in F_1 + F_2$, il existe $y_1 \in F_1$ et $y_2 \in F_2$ tels que $y_1 + y_2 = z, ||y_1|| \leq C||z||$ et $||y_2|| \leq C||z||$.
[Indication : Considérer l'application $\phi : F_1 \times F_2 \to F_1 + F_2$ telle que $\phi(y_1, y_2) = y_1 + y_2$.]

3. Soient E, F deux espaces de Banach. Montrer que l'ensemble des applications linéaires continues et surjectives de E dans F est ouvert dans $\mathcal{L}_c(E, F)$ (l'ensemble des applications linéaires et continues de E dans F).

Exercice 2 : théorème de Banach-Steinhaus

Soient E, F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'opérateurs linéaires et continus de E dans F.

1. On suppose dans cette question que, pour tout $x \in E$:

$$\sup_{i \in I} ||T_i(x)|| < +\infty$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $E_N = \{x \in E \text{ tq } ||T_i(x)|| \leq N, \forall i \in I\}$.
a) Montrer qu'il existe N tel que $\mathring{E}_N \neq \emptyset$.
b) Montrer qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ et $r > 0$ tel que $B_E(0, r) \subset E_{N'}$.
c) En déduire le théorème de Banach-Steinhaus : la famille $(T_i)_{i \in I}$ est bornée dans $\mathcal{L}_c(E, F)$ muni de la norme opérateur.

2. On suppose dans cette question que $(T_i)_{i \in I}$ n'est pas bornée dans $\mathcal{L}_c(E, F)$. Montrer qu'il existe un G_δ-dense $G \subset E$ tel que :

$$\forall x \in G, \qquad \sup_{i \in I} ||T_i(x)|| = +\infty$$

[On appelle G_δ-dense une intersection dénombrable d'ouverts denses.]

Exercice 3 : divergence des séries de Fourier de fonctions continues

Soit $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\begin{aligned} S_n : \mathcal{C}_{2\pi} &\to \mathcal{C}_{2\pi} \\ f &\to \left(t \to \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt} \right) \end{aligned}$$

(où $c_k(f)$ désigne le k-ième coefficient de Fourier de f : $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$)
1. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sup_{f\in\mathcal{C}_{2\pi}} \frac{|S_n(f)(t_0)|}{||f||_\infty} \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|dt$$

(où, pour tous $n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$, $D_n(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt}$)
2. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'il existe un sous-ensemble dense D de $\mathcal{C}_{2\pi}$ tel que, pour toute $f \in D$, la série de Fourier de f ne converge pas vers $f(t_0)$ en t_0.

Exercice 4 : théorème du point fixe de Schauder
Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach.
Pour toute $C \subset E$, on note Conv(C) l'enveloppe convexe de C.
1. Soit $K \subset E$ compacte. Montrer que $\overline{\text{Conv}(K)}$ est compacte.
2. On admet le théorème de Brouwer : pour tout $n \geq 1$, si $C \subset \mathbb{R}^n$ est un convexe compact et $f : C \to C$ est continue, alors f admet un point fixe.
On va démontrer le théorème du point fixe de Tychonov : si $C \subset E$ est convexe et compacte, alors toute application continue $f : C \to C$ admet un point fixe.
Soient C et f fixées.
a) Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Soient $y_1, ..., y_n \in C$ tels que :

$$C \subset \bigcup_{k\leq n} B(y_k, \epsilon)$$

On pose, pour tout $x \in C$:

$$\phi(x) = \frac{\sum\limits_k y_k.d\left(x, E - B(y_k, \epsilon)\right)}{\sum\limits_k d\left(x, E - B(y_k, \epsilon)\right)}$$

Montrer que, pour tout $x \in C$, $||\phi(x) - x|| < \epsilon$.
b) Soit $\psi = \phi \circ f$. Montrer que ψ admet un point fixe sur $\overline{\text{Conv}(\{y_1, ..., y_n\})}$.
c) En déduire qu'il existe $x_\epsilon \in C$ tel que $||f(x_\epsilon) - x_\epsilon|| < \epsilon$. Conclure.
3. Démontrer le théorème du point fixe de Schauder : soit $C \subset E$ convexe et fermée. Soit $f : C \to C$ continue telle que $\overline{f(C)}$ est compacte. Alors f admet un point fixe.

Exercice 5 : l'espace l^p pour $p < 1$
Soit $p \in]0; 1[$. On pose $l^p(\mathbb{N}) = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tq } \sum\limits_{n\geq 0} |u_n|^p < +\infty\}$.
Pour toutes $u, v \in l^p(\mathbb{N})$, on pose :

$$d(u, v) = \sum_{n\geq 0} |u_n - v_n|^p$$

1. Montrer que d est une distance.

2. Montrer que $l^p(\mathbb{N})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. Montrer que les lois internes et externes de cet espace vectoriel ($(\lambda, u) \to \lambda.u$ et $(u, v) \to u+v$) sont continues pour la topologie induite par d sur $l^p(\mathbb{N})$.
On dit que $l^p(\mathbb{N})$ est un *espace vectoriel topologique*.

4. Montrer que, pour la topologie induite pour la distance d, aucun voisinage borné de 0 dans $l^p(\mathbb{N})$ n'est convexe.
On dit que $l^p(\mathbb{N})$ n'est pas *localement convexe*.

Exercice 6 : hyperplan fermé d'orthogonal réduit à $\{0\}$

1. Soit E un espace de Hilbert. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

2. Soit $c_{00}(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles qui valent zéro à partir d'un certain rang. On munit cet ensemble du produit scalaire $\langle u, v\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$.
a) L'espace $c_{00}(\mathbb{N})$ est-il un espace de Hilbert ?
b) Soit :

$$f : u \in c_{00}(\mathbb{N}) \to \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{2^n}$$

Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $c_{00}(\mathbb{N})$, tel que $(\mathrm{Ker}\,(f))^\perp = \{0\}$.

3. Soit E un espace pré-hilbertien non-complet quelconque. Montrer que E contient un sous-espace vectoriel fermé F tel que $F \neq E$ et $F^\perp = \{0\}$.