# Feuille d'exercices n$^o$6

Corrigé

**Exercice 1**

1. Soit :

$$\phi : \mathbb{R} \times E \to \overline{E}$$
$$(\lambda, x) \to \lambda.x \in E \subset \overline{E}$$

C'est une application continue à valeurs dans un espace complet, uniformément continue sur tout ensemble borné. Puisque $\mathbb{R} \times E$ est dense dans $\mathbb{R} \times \overline{E}$, $\phi$ se prolonge continûment à $\mathbb{R} \times \overline{E}$, c'est-à-dire qu'on peut étendre à $\overline{E}$ la loi externe $(\lambda, x) \to \lambda.x$ définie sur $E$.
Ce produit, qu'on note toujours « . », vérifie $\lambda.(\mu.x) = (\lambda.\mu).x$ (car il le vérifie sur une partie dense de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \overline{E}$) et $1.x = x$.
De même, on peut étendre la loi interne $(x, y) \in E^2 \to x + y \in E$ en une loi sur $\overline{E}^2$ qui vérifie toujours les propriétés requises par la définition d'un espace vectoriel.
La distance $\overline{d}$ sur $\overline{E}$ est une norme sur $\overline{E}$. En effet, elle coïncide avec $||.||$ sur $E$. Elle vérifie donc sur un ensemble dense toutes les propriétés requises pour être une norme. Elle vérifie donc ces propriétés partout.
L'ensemble $(\overline{E}, \overline{d})$ est donc un espace vectoriel normé complet. C'est un espace de Banach.

2. L'ensemble $F_1 \times F_2$ est un espace de Banach pour la norme $||(x, y)|| = ||x|| + ||y||$. L'ensemble $F_1 + F_2$ est un espace de Banach car c'est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach.
L'application $\phi$ est linéaire, continue et surjective entre deux espaces de Banach. D'après le théorème de l'application ouverte, elle est ouverte. Il existe donc $M > 0$ tel que $\overline{B}(0, M) \cap (F_1 + F_2) \subset \phi((B(0, 1) \cap F_1) \times (B(0, 1) \cap F_2))$.
Pour tout $z \in F_1 + F_2$ tq $z \neq 0$, $M.\frac{z}{||z||} \in \overline{B}(0, M) \cap (F_1 + F_2)$ donc il existe $y_1' \in F_1$, $y_2' \in F_2$ tels que $||y_1'||, ||y_2'|| < 1$ et $y_1' + y_2' = M.\frac{z}{||z||}$.
Posons $C = \frac{1}{M}$, $y_1 = y_1' \frac{||z||}{M}$ et $y_2 = y_2' \frac{||z||}{M}$. On a alors $y_1 + y_2 = z$ et $||y_1|| \leq C||z||, ||y_2|| \leq C||z||$.

3. Notons $\mathcal{S}$ cet espace. On note $||.||$ les normes sur $E$ et $F$ et $|||.|||$ la norme opérateur sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.
Soit $f \in \mathcal{S}$. Montrons qu'un certain voisinage de $f$ dans $\mathcal{L}_c(E, F)$ est inclus dans $\mathcal{S}$.
Notons $\epsilon > 0$ tel que $B_F(0, \epsilon) \subset f(B_E(0, 1))$. Il existe d'après le théorème de l'application ouverte. Montrons que $B(f, \epsilon/2) \subset \mathcal{S}$. Soit $g \in B(f, \epsilon/2)$.

**Lemme 1.1.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $y \in B_F(0, \epsilon)$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ telle que, pour tout $n$, $||g(x_n) - y|| < \epsilon 2^{-n}$ et $||x_n - x_{n+1}|| \leq 2^{-n}$.*

*Démonstration.* On procède par récurrence sur $n$. Pour $n = 0$, c'est vrai : on prend $x_0 = 0$. Si c'est vrai pour $n$ : puisque $2^n(g(x_n)-y) \in B(0,\epsilon)$, il existe $z \in B_E(0,1)$ tel que $2^n(g(x_n)-y) = f(z)$. Alors :

$$||g(x_n - 2^{-n}z) - y|| = 2^{-n}||f(z) - g(z)|| \leq 2^{-n}||z||.|||f - g||| < 2^{-(n+1)}\epsilon$$

On peut donc poser $x_{n+1} = x_n - 2^{-n}z$. □

Pour tout $y \in B_F(0,\epsilon)$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par le lemme est de Cauchy. Elle converge donc dans $E$. Si $z$ est sa limite, $g(z) = y$. Donc $B_F(0,\epsilon) \subset g(E)$. Cela implique que $g$ est surjective.

**Exercice 2**

1. a) Pour tout $N$, $E_N$ est fermé (c'est une intersection d'images réciproques de fermés par des applications continues). De plus, $\bigcup\limits_N E_N = E$, d'après l'hypothèse.
Par le théorème de Baire, les $E_N$ ne peuvent pas tous être d'intérieur vide (une union de fermés d'intérieur vide, dans un espace complet, est d'intérieur vide). Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{E}_N \neq \emptyset$.
b) Soit $N$ comme à la question précédente. Soient $x_0 \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $B_E(x_0,r) \subset E_N$. Pour tout $y \in B_E(0,r)$ et pour tout $i \in I$, puisque $x_0$ et $x_0 + y$ appartiennent à $E_N$ :

$$||T_i(y)|| = ||T_i(x_0 + y) - T_i(x_0)|| \leq ||T_i(x_0 + y)|| + ||T_i(x_0)|| \leq 2N$$

Donc $B_E(0,r) \subset E_{2N}$.
c) Soient $r$ et $N'$ comme à la question précédente. Puisque $E_{N'}$ est fermé, on a en fait $\overline{B}_E(0,r) \subset E_{N'}$. Pour tout $x \in E$, $rx/||x|| \in \overline{B}_E(0,r)$ donc, pour tout $i \in I$ :

$$\left(\left|\left|T_i\left(\frac{rx}{||x||}\right)\right|\right| \leq N'\right) \quad \Rightarrow \quad \left(||T_i(x)|| \leq \frac{N'}{r}||x||\right)$$

Donc, pour tout $i \in I$, $|||T_i||| \leq \frac{N'}{r}$.
2. On reprend la démonstration de la question 1. Tous les $E_N$ doivent être d'intérieur vide sinon, comme à la question 1., on peut montrer que $(T_i)_{i\in I}$ est une famille bornée.
Pour tout $N$, $E - E_N$ est donc un ouvert dense de $E$. Notons $G = \bigcap\limits_{N\in\mathbb{N}}(E - E_N)$. C'est un $G_\delta$-dense et, pour tout $x \in G$, $x$ n'appartient à aucun des $E_N$ donc :

$$\sup_{i\in I}||T_i(x)|| = +\infty$$

**Exercice 3**

1.

$$\begin{aligned}
S_n(f)(t_0) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt_0} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \left( \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikt_0} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left( \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-t_0)} \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t-t_0) dt
\end{aligned}$$

Posons, pour tout $\epsilon > 0$, $f_\epsilon(t) = \frac{D_n(t-t_0)}{\epsilon + |D_n(t-t_0)|}$. C'est bien une fonction continue et $2\pi$-périodique (puisque $D_n$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue et $2\pi$-périodique).
Pour tout $t$ :

$$|D_n(t-t_0)| - \epsilon \leq f_\epsilon(t) D_n(t-t_0) \leq |D_n(t-t_0)|$$

Lorsque $\epsilon \to 0$, $S_n(f_\epsilon)(t_0) \to \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t-t_0)| dt$.
Pour tout $\epsilon > 0$, $||f_\epsilon||_\infty \leq 1$ donc :

$$\sup_{f \in \mathcal{C}_{2\pi}} \frac{|S_n(f)(t_0)|}{||f||_\infty} \geq \sup_{\epsilon > 0} |S_n(f_\epsilon)(t_0)| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt$$

2. L'ensemble $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un espace de Banach (ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans l'espace complet $\mathbb{R}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f \to S_n(f)(t_0))$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{C}_{2\pi}$ vers $\mathcal{C}_{2\pi}$ (puisque, pour tout $k$ et toute $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $|c_k(f)| \leq ||f||_\infty$ donc $f \to c_k(f)$ est un opérateur continu).
La famille $(f \to S_n(f)(t_0))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{C}_{2\pi}, \mathbb{R})$. En effet, d'après ce qu'on a vu à la question précédente :

$$\begin{aligned}
|||f \to S_n(f)(t_0)||| &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \right| dt \\
&\geq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin((n+1/2)t)}{t} \right| dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi(n+1/2)} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \\
&\to +\infty
\end{aligned}$$

D'après la question 2. de l'exercice précédent, cela implique qu'il existe un $G_\delta$-dense $G \subset \mathcal{C}_{2\pi}$ tel que, pour toute $f \in G$ :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(t_0)| = +\infty$$

Pour toute $f \in G$, $(S_n(f)(t_0))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

**Exercice 4**

1. Nous allons montrer que $\mathrm{Conv}(K)$ est précompacte dans $E$. Cela impliquera que $\overline{\mathrm{Conv}(K)}$ l'est aussi : si $\mathrm{Conv}(K) \subset \bigcup\limits_{k\leq N} B(x_k,\epsilon)$, alors $\overline{\mathrm{Conv}(K)} \subset \bigcup\limits_{k\leq N} \overline{B(x_k,\epsilon)} \subset \bigcup\limits_{k\leq N} B(x_k,2\epsilon)$.

Cela impliquera donc que $\overline{\mathrm{Conv}(K)}$ est compacte, puisque c'est un espace complet (car il s'agit d'une partie fermée d'un espace complet).

Soit $\epsilon > 0$ quelconque.

Soient $x_1,...,x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup\limits_{k\leq n} B(x_k,\epsilon/2)$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{n}{N}\sup\limits_{k\leq n}||x_k|| < \epsilon/2$.

Posons $\mathcal{F} = \left\{\frac{k_1}{N}x_1 + ... + \frac{k_n}{N}x_n \text{ tq } k_1,...,k_n \in \{0,...,N\}\right\}$. Montrons que $\mathrm{Conv}(K) \subset \bigcup\limits_{y\in\mathcal{F}} B(y,\epsilon)$.

Soit $Z \in \mathrm{Conv}(K)$ quelconque. Il existe $t_1,...,t_R \in [0;1]$ et $z_1,...,z_R \in K$ tels que $t_1+...+t_R = 1$ et $t_1z_1 + ... + t_Rz_R = Z$. Pour tout $r \leq R$, soit $k_r$ tel que $z_r \in B(x_{k_r},\epsilon/2)$.

Alors $||Z - \sum\limits_r t_r x_{k_r}|| \leq \sum\limits_r t_r||z_r - x_{k_r}|| < \epsilon/2$.

Posons, pour tout $k \leq n$, $T_k = \sum\limits_{k_r=k} t_r$. On a alors $||Z - \sum\limits_k T_k x_k|| < \epsilon/2$.

Si on note $K_k$ la partie entière de $NT_k$, pour tout $k$, on a de plus :

$$||\left(\sum_{k\leq n} T_k x_k\right) - \left(\sum_{k\leq n}\frac{K_k}{N}x_k\right)|| \leq \sum_{k\leq n}\left|T_k - \frac{K_k}{N}\right|.||x_k|| < \epsilon/2$$

On en déduit :

$$||Z - \left(\sum_k \frac{K_k}{N}x_k\right)|| < \epsilon$$

On a donc montré que $Z \in \bigcup\limits_{y\in\mathcal{F}} B(y,\epsilon)$.

2. a) $\left|\left|\frac{\sum\limits_k y_k.d(x,E-B(y_k,\epsilon))}{\sum\limits_k d(x,E-B(y_k,\epsilon))} - x\right|\right| = \left|\left|\frac{\sum\limits_k (y_k-x).d(x,E-B(y_k,\epsilon))}{\sum\limits_k d(x,E-B(y_k,\epsilon))}\right|\right| \leq \frac{\sum\limits_k ||y_k-x||.d(x,E-B(y_k,\epsilon))}{\sum\limits_k d(x,E-B(y_k,\epsilon))} \leq \epsilon$

La dernière inégalité provient du fait que, pour tout $k$, $d(x,E-B(y_k,\epsilon)) = 0$ si $||x-y_k|| \geq \epsilon$, ce qui fait que, pour tout $k$ :

$$||y_k - x||d(x,E-B(y_k,\epsilon)) \leq \epsilon d(x,E-B(y_k,\epsilon))$$

b) Restreinte à $\overline{\mathrm{Conv}(\{y_1,...,y_n\})}$, l'application $\psi$ est une fonction continue à valeurs dans $\overline{\mathrm{Conv}(\{y_1,...,y_n\})}$. L'ensemble $\overline{\mathrm{Conv}(\{y_1,...,y_n\})}$ est un convexe compact inclus dans un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension au plus $n$. D'après le théorème de Brouwer, $\psi$ admet donc un point fixe sur cet ensemble.

[Remarque : en fait, $\mathrm{Conv}(\{y_1,...,y_n\})$ est toujours un fermé. L'adhérence n'est pas nécessaire.]

c) Soit $x_\epsilon$ le point fixe de la question précédente. Il appartient à $C$.

$||f(x_\epsilon) - x_\epsilon|| = ||f(x_\epsilon) - \phi(f(x_\epsilon))|| < \epsilon$.

Puisque $C$ est compacte (et incluse dans un espace métrique), on peut extraire de $(x_{1/n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente. Si on note $x_\infty$ la limite de cette sous-suite, alors, par continuité, $||f(x_\infty) - x_\infty|| = 0$ donc $f(x_\infty) = x_\infty$.

3. Notons $C_2 = \overline{\text{Conv}(\overline{f(C)})}$. D'après la question 1., c'est un compact de $E$. C'est aussi un ensemble convexe.
L'ensemble $C_2$ est inclus dans $C$. Restreinte à $C_2$, l'application $f$ est une application continue d'un convexe compact de $E$ dans lui-même. D'après 2., elle admet donc un point fixe dans $C_2$, qui est aussi un point fixe dans $E$.

**Exercice 5**

1. La fonction $d$ est symétrique et séparante. Il faut montrer qu'elle respecte l'inégalité triangulaire.
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y|^p \leq ||x|+|y||^p \leq |x|^p + |y|^p$ (cela se démontre en dérivant). Cela implique que, pour toutes suites $u, v, w \in l^p(\mathbb{N})$, $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$.

2. L'espace $l^p(\mathbb{N})$ est stable par multiplication par des scalaires. De plus, comme on l'a vu à la question précédente, pour toutes $u, v \in l^p(\mathbb{N})$ :

$$\sum_{n\geq 0} |u_n + v_n|^p \leq \sum_{n\geq 0} (|u_n|^p + |v_n|^p) < +\infty$$

Donc $l^p(\mathbb{N})$ est aussi stable par addition interne.

3. Remarquons que $d(\lambda.u, \lambda'.u') \leq d(\lambda.u, \lambda'.u) + d(\lambda'.u, \lambda'.u') = |\lambda - \lambda'|^p d(0,u) + |\lambda'|^p d(u,u')$.
Soient $\lambda_0 \in \mathbb{R}, u_0 \in l^p(\mathbb{N})$ fixés. Soit $\epsilon > 0$ quelconque. D'après l'inégalité précédente, si :

$$|\lambda' - \lambda_0| \leq (\epsilon/(2d(0,u)))^{1/p} \quad \text{et} \quad d(u,u') \leq \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{|\lambda_0|^p + \epsilon/(2d(0,u))}$$

alors $d(\lambda.u, \lambda'.u') \leq \epsilon$. Donc $(\lambda, u) \to \lambda.u$ est continue.
Un raisonnement similaire est valable pour l'addition.

4. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage borné de 0. Supposons par l'absurde qu'il est convexe.
Il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(0,r) \subset \mathcal{V}$.
Pour tout $s \in \mathbb{N}$, soit $e_s$ la suite dont toutes les composantes sont nulles sauf la $s$-ième qui vaut 1. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, $r^{1/p} e_s \in \mathcal{V}$.
Puisque $\mathcal{V}$ est convexe, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\frac{r^{1/p}e_1}{N} + ... + \frac{r^{1/p}e_N}{N} \in \mathcal{V}$. Or :

$$d\left(0, \frac{r^{1/p}e_1}{N} + ... + \frac{r^{1/p}e_N}{N}\right) = rN^{1-p}$$

Donc, pour tout $N$, $\mathcal{V}$ contient un élément dont la distance à 0 est $rN^{1-p}$. Si l'on fait tendre $N$ vers l'infini, c'est en contradiction avec le fait que $\mathcal{V}$ est borné.

**Exercice 6**

1. Supposons d'abord que $F$ est dense. Soit $x \in F^\perp$. Montrons que $x = 0$.
Soit $\phi_x : E \to \mathbb{R}$ l'application telle que $\phi_x(y) = \langle x, y \rangle$. Cette application est continue (car $|\phi_x(y)| \leq ||x||.||y||$). L'ensemble $\phi_x^{-1}(\{0\})$ est donc fermé. Puisqu'il est dense (car il contient $F$), $\phi_x^{-1}(\{0\}) = E$. En particulier, $||x||^2 = \phi_x(x) = 0$ donc $x = 0$.

Supposons maintenant que $F$ n'est pas dense. Posons $F_2 = \overline{F}$. C'est un espace vectoriel fermé de $E$ différent de $E$.

Soit $y \in E - F_2$. Puisque $E$ est un espace de Hilbert, il existe $y' \in F_2$ tel que $d(y, F_2) = ||y - y'||$ et $(y - y') \perp F_2$. Posons $x = y - y'$. C'est un élément non-nul de $E$ (car $y' \in F_2$ et $y \notin F_2$) et $x \in F_2^{\perp} \subset F^{\perp}$.
2. a) Non. Il est seulement préhilbertien. En effet, soit, pour tout $n$, $u_n = 2^{-n}\delta_n$ (c'est-à-dire la suite dont tous les termes sont nuls sauf le $n$-ième qui vaut $2^{-n}$).
Pour tout $n$, $||u_n|| = 2^{-n}$ donc la suite $\sum\limits_n u_n$ est normalement convergente : $\sum\limits_n ||u_n|| = 2 < +\infty$.
Pourtant, $\left(\sum\limits_{n \leq N} u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ ne converge pas dans $c_{00}(\mathbb{N})$ : si elle admettait une limite $u_\infty$, la coordonnée $n$ de $u_\infty$ devrait être égale à $2^{-n}$ pour tout $n$ donc $u_\infty$ ne serait pas nulle à partir d'un certain rang.
b) L'application $f$ est continue. En effet, pour tout $u$, par Cauchy-Schwarz :

$$|f(u)| = \left|\sum_n \frac{u_n}{2^n}\right| \leq \sqrt{\left(\sum_n u_n^2\right)} . \sqrt{\left(\sum_n 2^{-2n}\right)} = \sqrt{\frac{4}{3}}||u||$$

L'ensemble $\mathrm{Ker}\,(f) = f^{-1}(\{0\})$ est donc fermé dans $c_{00}(\mathbb{N})$.
Montrons que $(\mathrm{Ker}\,(f))^{\perp} = \{0\}$. Soit $u \in (\mathrm{Ker}\,(f))^{\perp}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$ pour tout $n > N$.
Définissons $v \in c_{00}(\mathbb{N})$ de la manière suivante :
– Pour tout $n \leq N$, $v_n = u_n$.
– $v_{N+1} = -2^{N+1}.\left(\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} v_n\right)$
– Pour tout $n > N + 1$, $v_n = 0$.
La suite $v$ appartient au noyau de $f$ :

$$f(v) = \sum_{n \leq N} 2^{-n} v_n + 2^{-(N+1)} v_{N+1} = 0$$

La suite $v$ est donc orthogonale à $u$ :

$$0 = \langle u, v \rangle = \sum_{n \leq N} u_n v_n = ||u||^2$$

Donc $u = 0$.
3. Soit $E_c$ le complété de $E$, qui est un espace de Hilbert. Soit $x_0 \in E_c - E$. Posons $F_c = \{x_0\}^{\perp}$ et $F = E \cap F_c$. Puisque $F_c$ est fermé dans $E_c$, $F$ est fermé dans $E$.
Montrons que $F^{\perp} = \{0\}$ dans $E$. Soit, par l'absurde, $u \in F^{\perp}$ tel que $u \neq 0$. On n'a pas $\langle u, x_0 \rangle = 0$, sinon on aurait $u \in F$ donc $u \perp u$. Pour tout $v \in E$, $v - \frac{\langle v, x_0 \rangle}{\langle u, x_0 \rangle} u \perp x_0$ donc :

$$\left(\langle u, v - \frac{\langle v, x_0 \rangle}{\langle u, x_0 \rangle} u \rangle = 0\right) \Rightarrow \left(\langle v, \frac{\langle u, x_0 \rangle}{||u||^2} u \rangle = \langle v, x_0 \rangle\right)$$

Comme $E$ est dense dans $E_c$, la dernière égalité est en fait vraie pour tout $v \in E_c$, ce qui implique :

$$\frac{\langle u, x_0 \rangle}{||u||^2} u = x_0$$

C'est impossible car $x_0 \notin E$ et $u \in E$.