Feuille d'exercices n^{o}7

Exercice 1 : questions diverses

1. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble dénombrable. Montrer que $\mathbb{R}^2 - A$ est connexe par arcs.

2. Soit X un espace topologique localement compact. Soient Y un autre espace topologique et $f : X \to Y$ une application continue. L'ensemble $f(X)$, muni de la topologie induite par celle de Y, est-il localement compact ?

3. a) Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0;1])$, muni de la topologie produit, est un espace séparable.
b) Donner un exemple d'espace topologique compact non-séparable.

Exercice 2 : espaces de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert séparable, réel, de dimension infinie. On note $\langle ., . \rangle$ son produit scalaire.
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.
Soient :

$$F_1 = \left\{ \sum_n u_n e_n \text{ tq } u \in l^2(\mathbb{N}) \text{ et } u_n = 0 \text{ pour tout } n \equiv 1[2] \right\}$$

$$F_2 = \left\{ \sum_n u_n e_n \text{ tq } u \in l^2(\mathbb{N}) \text{ et } u_n = u_{n-1}/n \text{ pour tout } n \equiv 1[2] \right\}$$

Montrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels fermés de H mais que $F_1 + F_2$ n'est pas fermé.

Exercice 3

Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé dont tous les éléments sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que $T : f \in F \to f' \in E$ est une application continue.

2. Montrer que la boule unité de F forme une famille équicontinue de fonctions.

3. En déduire que F est de dimension finie.

Exercice 4 : continuité des opérateurs auto-adjoints

Soit H un espace de Hilbert. Soit $T : H \to H$ une application linéaire telle que, pour tous $x, y \in H$:

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$$

Démontrer que T est continue.

Exercice 5 : théorème du point fixe de Schaefer

Soit E un espace de Banach. Soit $T : E \to E$ une application continue vérifiant les deux propriétés suivantes :

(1) Si $\Omega \subset E$ est bornée, $\overline{T(\Omega)}$ est compacte.

(2) $\{x \in E \text{ tq } \exists \lambda \in [0;1], x = \lambda T(x)\}$ est borné.

Montrer que T a un point fixe.
[Indication : Utiliser le théorème du point fixe de Schauder, vu dans le TD précédent.]

Exercice 6 : une démonstration du théorème de Brouwer
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note B_n la boule euclidienne fermée de $\mathbb{R}^n$ et S_n son bord, la sphère unité.

1. Dans cette question, on démontre qu'il n'existe pas de fonction $\mathcal{C}^1$ $\phi : B_n \to S_n$ telle que $\phi(x) = x$ pour tout $x \in S_n$.
On suppose par l'absurde qu'une telle fonction ϕ existe. Pour tout $t \in [0;1]$, on note :

$$\begin{aligned} \phi_t : B_n &\to B_n \\ x &\to (1-t)x + t\phi(x) \end{aligned}$$

a) Montrer que, si t est assez proche de 0, ϕ_t est injective.
b) Montrer que, si t est assez proche de 0, ϕ_t est un difféomorphisme local en tout point de $\mathring{B}_n$.
c) Montrer que, si t est assez proche de 0, ϕ_t est un homéomorphisme de B_n dans B_n.
d) En déduire que, pour t assez proche de 0, $\int_{B_n} \det(D\phi_t(x))d^n x = \int_{B_n} 1.d^n x$.
e) Montrer que, pour tout $x \in \mathring{B}_n$, $\det(D\phi_1(x)) = 0$. En déduire une absurdité.

2. Montrer que toute fonction $\phi : B_n \to B_n$, de classe $\mathcal{C}^1$, admet un point fixe.

3. Montrer que toute fonction $\phi : B_n \to B_n$, de classe $\mathcal{C}^0$, admet un point fixe.
[Indication : On pourra admettre qu'une telle fonction ϕ est limite uniforme de fonctions $\phi_k : B_n \to B_n$ de classe $\mathcal{C}^1$.]