Feuille d'exercices n^{o}7

Corrigé

Exercice 1

1. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 - A$. Nous allons montrer qu'il existe un chemin allant de l'un à l'autre. On peut supposer $x_1 \neq x_2$. Quitte à changer de repère, on peut supposer (pour simplifier) que $x_1 = (0,0)$ et $x_2 = (1,0)$.
Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on définit une fonction $\phi_y : [0;1] \to \mathbb{R}^2$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \phi_y(t) &= (t, ty) \quad \text{ si } t \in [0;1/2] \\ &= (t, (1-t)y) \quad \text{ si } t \in [1/2;1] \end{aligned}$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, ϕ_y est un chemin continu de x_1 à x_2. Montrons qu'il existe au moins un y tel que $\phi_y(t) \in \mathbb{R}^2 - A$ pour tout $t \in [0;1]$.
Par l'absurde, si ce n'est pas le cas, cela signifie que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $t_y \in [0;1]$ tel que $\phi_y(t_y) \in A$.
Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $t_y \neq 0$ et $t_y \neq 1$. Si $y \neq y'$, $\phi_y(t_y) \neq \phi_{y'}(t_{y'})$. En effet, pour avoir l'égalité, il faudrait avoir $t_y = t_{y'}$ et $t_y y = t_{y'} y' = t_y y'$, donc $y = y'$.
Cela signifie que $\{\phi_y(t_y)\}_{y \in \mathbb{R}}$ est une famille indénombrable d'éléments distincts de A. C'est absurde.

2. Pas nécessairement. Soit par exemple $Y = l^\infty(\mathbb{N})$, muni de la norme uniforme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note e_n la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ième, qui vaut 1.
On définit une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to Y$ de la façon suivante :

$$f(t) = (1 - |2t - (2n+1)|)e_n \qquad \text{si } t \in [n; n+1]$$

Montrons que $f(\mathbb{R}^+)$ n'est pas localement compact en $f(0) = 0$.
Soit par l'absurde $\mathcal{V}$ un voisinage compact de 0 dans $f(\mathbb{R}^+)$. Soit $r \in [0;1]$ tel que $\overline{B}(0,r) \subset \mathcal{V}$.
L'ensemble $\overline{B}(0,r) \cap f(\mathbb{R}^+)$ contient re_n pour tout n. En effet, $||re_n||_\infty = r$ et $re_n = f(n+r/2) \in f(\mathbb{R}^+)$.
La suite $(re_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne contient pas de sous-suite convergente. L'ensemble $\overline{B}(0,r) \cap f(\mathbb{R}^+)$ n'est donc pas compact. C'est pourtant un fermé de $\mathcal{V}$, que nous avions supposé compact. C'est absurde.

3. a) Soit $\mathcal{I}_\mathbb{Q}$ l'ensemble de tous les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont rationnelles. Si $I_1, ..., I_n \in \mathcal{I}_\mathbb{Q}$ sont des intervalles disjoints et $r_1, ..., r_n$ sont des rationnels quelconques, on note $f_{I_1,...,I_n,r_1,...,r_n}$ la fonction qui vaut r_k sur I_k et 0 sur $\mathbb{R} - (I_1 \cup ... \cup I_n)$.
La famille $G = \{f_{I_1,...,I_n,r_1,...,r_n} \text{ tq } n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable. Montrons qu'elle est dense dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0;1])$.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert pour la topologie produit. Montrons que $\mathcal{U}$ contient un élément de G.
Quitte à prendre $\mathcal{U}$ un peu plus petit, on peut supposer qu'il s'agit d'un ouvert élémentaire de la forme :

$$\mathcal{U} = \{f : \mathbb{R} \to [0;1] \text{ tq } f(x_i) \in V_i, i = 1, ..., n\}$$

où $x_1, ..., x_n$ sont des réels distincts et $V_1, ...V_n$ sont des ouverts non-vides de $[0;1]$.
Il existe $I_1, ..., I_n \in \mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$ des segments disjoints tels que $x_i \in I_i$ pour tout $i \leq n$. Pour tout i, soit $r_i \in V_i \cap \mathbb{Q}$. Alors la fonction $f_{I_1,...,I_n,r_1,...,r_n}$ appartient à $\mathcal{U} \cap G$.
b) Soit $X = \mathcal{F}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), [0;1])$, muni de la topologie produit. C'est un espace compact, d'après le théorème de Tychonov. Montrons qu'il n'est pas séparable.
Soit par l'absurde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense d'éléments de X.
Pour tout $s \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, notons $E_s = \{n \in \mathbb{N} \text{ tq } f_n(s) < 1/2\}$. Montrons que, si $s \neq s'$, alors $E_s \neq E_{s'}$.
En effet, puisque f_n est dense, il existe n tel que $f_n \in \{f \in X \text{ tq } f(s) \in [0; 1/2[, f(s') \in]1/2; 0]\}$.
Un tel n appartient à E_s mais pas à $E_{s'}$.
L'application $s \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \to E_s \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est donc injective. Or on sait qu'il n'existe aucune injection de $\mathcal{P}(E)$ vers E, quel que soit l'ensemble E considéré. C'est donc absurde.

Exercice 2

L'ensemble F_1 est égal à :

$$F_1 = \bigcap_{n\equiv 1[2]} \{x \in H \text{ tq } \langle x, e_n\rangle = 0\}$$

C'est donc une intersection de fermés. C'est un fermé.
De même :

$$F_2 = \bigcap_{n\equiv 1[2]} \{x \in H \text{ tq } n\langle x, e_n\rangle - \langle x, e_{n-1}\rangle = 0\}$$

donc cet ensemble est fermé.
Soit $v \in l^2(\mathbb{N})$. L'élément $x = \sum\limits_n v_n e_n$ appartient à $F_1 + F_2$ si et seulement si $\sum\limits_{n\equiv 1[2]} n^2 v_n^2 < +\infty$.
En effet, si $x \in F_1 + F_2$, il existe $u, u' \in l^2(\mathbb{N})$ telles que $\sum\limits_n u_n e_n \in F_1$, $\sum\limits_n u'_n e_n \in F_2$ et, pour tout n, $u_n + u'_n = v_n$. On doit avoir, pour tout $n \equiv 1[2]$, $u'_n = v_n$ car $u_n = 0$. Pour tout $n \equiv 0[2]$, $u'_n = (n+1)u'_{n+1} = (n+1)v_{n+1}$.
Puisque u' est dans $l^2(\mathbb{N})$, on doit avoir $\sum\limits_{n\equiv 1[2]} n^2 v_n^2 = \sum\limits_{n\equiv 0[2]} u_n'^2 < +\infty$.
Réciproquement, si $\sum\limits_{n\equiv 1[2]} n^2 v_n^2 < +\infty$, les suites u et u' définies par $u_n = v_n - (n+1)v_{n+1}$ et $u'_n = (n+1)v_{n+1}$ si $n \equiv 0[2]$ et $u_n = 0$ et $u'_n = v_n$ si $n \equiv 1[2]$ sont dans $l^2(\mathbb{N})$ et définissent un élément de F_1 et un élément de F_2 dont la somme vaut x.
En conséquent, $x = \sum\limits_n \frac{e_n}{n}$ n'appartient pas à $F_1 + F_2$. Pourtant, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n\leq N} \frac{e_n}{n}$ appartient à $F_1 + F_2$. Donc $F_1 + F_2$ n'est pas fermé.

Exercice 3

1. C'est une application linéaire entre deux espaces de Banach. Son graphe est fermé : si $(f_n, f'_n) \to (f_\infty, g_\infty)$, alors f_∞ est dérivable de dérivée g_∞ (lorsqu'une suite de fonctions converge

uniformément et la suite de ses dérivées aussi, la limite est dérivable, de dérivée la limite des dérivées). Donc elle est continue, par le théorème du graphe fermé.

2. Puisque T est continue, il existe $C > 0$ telle que, pour toute $f \in F$, $||T(f)|| \leq C||f||$. En particulier, pour toute $f \in B_F(0,1)$, $||f'|| \leq C$ donc f est une fonction C-lipschitzienne. Cela implique l'équicontinuité.

3. La boule unité de F est d'adhérence compacte dans F, d'après le théorème d'Ascoli : elle est équicontinue et, pour tout $x \in [-1;1]$, $f(x) \in [0;1]$ si $f \in B_F(0,1)$ donc $\{f(x)\}_{f \in B_F(0,1)}$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}$.
Puisque F est fermé, l'adhérence de sa boule unité est la boule unité elle-même. L'espace F est donc un espace normé dont la boule unité est compacte. Il est de dimension finie.

Exercice 4
Solution à l'aide du théorème du graphe fermé : Montrons que $\{(x, T(x)), x \in H\}$ est un sous-ensemble fermé de H^2.
Supposons que $x_n \to x_\infty$ et $T(x_n) \to y_\infty$. Il faut montrer que (x_∞, y_∞) appartient au graphe, c'est-à-dire que $y_\infty = T(x_\infty)$.
Pour tout $z \in H$, $\langle T(x_n), z\rangle \to \langle y_\infty, z\rangle$. De plus, $\langle T(x_n), z\rangle = \langle x_n, T(z)\rangle \to \langle x_\infty, T(z)\rangle = \langle T(x_\infty), z\rangle$. Cela implique que $\langle y_\infty, z\rangle = \langle T(x_\infty), z\rangle$. Puisque c'est vrai pour tout $z \in H$, $y_\infty = T(x_\infty)$.
Solution à l'aide du théorème de Banach-Steinhaus : Pour tout y, l'application $x \to \langle T(x), y\rangle$ est linéaire et continue. En effet, pour tout x, $|\langle T(x), y\rangle| = |\langle x, T(y)\rangle| \leq ||x||.||T(y)||$.
De plus, pour tout x, $\sup\limits_{||y|| \leq 1} |\langle T(x), y\rangle| = ||T(x)|| < +\infty$. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, la famille $\{x \to \langle T(x), y\rangle\}_{||y|| \leq 1}$ est donc bornée dans l'ensemble des fonctions linéaires continues de H dans lui-même. Il existe donc $C > 0$ tel que, pour tout $x \in H$ et tout $y \in B_H(0,1)$:
$$|\langle T(x), y\rangle| \leq C||x||$$
Puisque c'est vrai pour tout y tel que $||y|| \leq 1$, cela entraîne $||T(x)|| \leq C||x||$. L'application T est donc continue.

Exercice 5
On ne peut pas appliquer directement le théorème de Schauder car l'image de T n'est pas nécessairement d'adhérence compacte.
Nous allons définir un opérateur S qui coïncidera avec T sur une boule de rayon assez grand et dont l'image sera d'adhérence compacte.
Soit $R > 0$ tel que $\{x \in E \text{ tq } \exists \lambda \in [0;1], x = \lambda T(x)\} \subset B(0,R)$.
Définissons $S(x) = T\left(\frac{x}{\max(1, ||x||/R)}\right)$, pour tout $x \in E$. C'est une application continue car c'est une composée d'applications continues.
Pour tout $x \in E$, $\left|\left|\frac{x}{\max(1,||x||/R)}\right|\right| \leq R$ donc $S(E) \subset T(\overline{B}(0,R))$. D'après (1), $\overline{S(E)}$ est compacte.
Puisque E est un convexe fermé de E, on peut appliquer à S le théorème de Schauder : S admet un point fixe, qu'on note x_0.

On a $||x_0|| < R$. En effet, sinon, $T(Rx_0/||x_0||) = S(x_0) = x_0$, ce qui implique que $\frac{Rx_0}{||x_0||} = \frac{R}{||x_0||}T\left(\frac{Rx_0}{||x_0||}\right)$. Or $\left|\frac{R}{||x_0||}\right| \leq 1$ donc, par définition de R, on devrait avoir $R > \left|\frac{Rx_0}{||x_0||}\right| = R$. C'est absurde.
Donc $x_0 = S(x_0) = T(x_0)$ et T admet bien un point fixe.

Exercice 6

1. a) Soit $C > 0$ tel que $|||D\phi(x)||| \leq C$ pour tout $x \in B_n$.
Pour tous $x, y \in B_n$ tels que $x \neq y$, $\phi_t(x) - \phi_t(y) = (1-t)(x-y) + t(\phi(x) - \phi(y))$. D'après l'inégalité des accroissements finis, $||\phi(x) - \phi(y)|| \leq C||x-y||$ donc $||\phi_t(x) - \phi(y)|| \geq (1-t-tC)||x-y||$, ce qui est strictement positif pour tous x, y si $t < 1/(1+C)$.
b) $D\phi_t(x) = (1-t)\mathrm{Id} + tD\phi(x)$. Le noyau de cette application est réduit à $\{0\}$ pour tout x si $t < 1/(1+C)$.
En effet, si $y \neq 0$ et $((1-t)\mathrm{Id} + tD\phi(x))(y) = 0$, puisque $||D\phi(x)(y)|| \leq C||y||$, on doit avoir $(1-t)||y|| = t||D_\phi(x)(y)|| \leq Ct||y||$ donc $1-t \leq Ct$.
Ainsi, lorsque $t < 1/(C+1)$, ϕ_t a une différentielle inversible en tout point de $\mathring{B}_n$. D'après le théorème d'inversion locale, ϕ_t est donc un difféomorphisme local.
c) D'après les question précédentes, ϕ_t est injective si $t < 1/(C+1)$ et est un difféomorphisme local en tout point de $\mathring{B}_n$.
Il suffit de montrer que, dans ce cas, ϕ_t est aussi surjective.
Soit $R \in]0; 1[$ quelconque. Montrons que $\phi_t(B_n) \cap B(0, R)$ est ouvert et fermé dans $B(0, R)$.
C'est un fermé car $\phi_t(B_n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$: c'est l'image d'un compact par une application continue. C'est de plus un ouvert car, si $\phi_t(x) \in B(0, R)$, $x \in \mathring{B}_n$ (en effet, si $x \in S_n$, $\phi_t(x) = (1-t)x + tx = x \notin B(0, R)$). D'après la question b), ϕ_t est un difféomorphisme local en x donc $\phi_t(B_n)$ est un voisinage de $\phi_t(x)$.
Puisque $B(0, R)$ est connexe, on en déduit que, pour tout R, $\phi_t(B_n) \cap B(0, R) = \emptyset$ ou $B(0, R) \subset \phi_t(B_n)$. Lorsque R est assez grand, on ne peut pas avoir $\phi_t(B_n) \cap B(0, R) = \emptyset$ (pour $R > t$, par exemple, $\phi_t(0) = t\phi(0) \in B(0, R)$ puisque $||t\phi(0)|| = t$).
Donc, pour tout R assez proche de 1, $B(0, R) \subset \phi_t(B_n)$. On a donc $\mathring{B}_n \subset \phi_t(B_n)$. Puisque $\phi_t(B_n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$, on a aussi $B_n \subset \phi_t(B_n)$. Donc ϕ_t est surjective.
L'application ϕ_t, qui est une bijection continue dont l'ensemble de départ est compact, est donc un homéomorphisme.
d) Pour tout $t < 1/(C+1)$, $\det(D\phi_t(x)) > 0$, quel que soit $x \in B_n$. En effet, sinon, $D\phi_t$ admet une valeur propre négative.
Or $D\phi_t(x) = (1-t)\mathrm{Id} + tD\phi(x)$ donc, si λ est valeur propre négative de $D\phi_t$, $\lambda + t - 1$ est valeur propre de $tD\phi(x)$. Puisque les valeurs propres de $tD\phi(x)$ sont de valeur absolue inférieure ou égale à tC, c'est impossible ($\lambda + t - 1 \leq t - 1 < -Ct$).
Donc $\det(D\phi_t(x)) = |\det(D\phi_t(x))|$ et on reconnaît la formule de changement de variables associée à l'homéomorphisme $\phi_t : B_n \to B_n$.
e) Soit $x \in \mathring{B}_n$.
Au voisinage de x, $\langle \phi(y), \phi(y) \rangle = 1$ donc $\langle D\phi(x)(y), \phi(x) \rangle = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. L'image de $D\phi(x)$ est donc incluse dans $\{\phi(x)\}^\perp$. Puisque $\phi(x) \in S_n$, $\phi(x) \neq 0$ donc l'image de $D\phi(x)$ est de dimension au plus $n-1$. Cela entraîne que $\det(D\phi(x)) = 0$.
On a donc $\int_{B_n} \det(D\phi_1(x)) d^n x = \int_{B_n} \det(D\phi(x)) d^n x = 0$.

La fonction $t \to \int_{B_n} \det(D\phi_t(x)) d^n x$ est un polynôme en t. Ce polynôme est constant au voisinage de 0 et sa valeur est non-nulle, d'après la question d). Il doit donc être constant et non-nul sur tout $[0;1]$. C'est en contradiction avec le fait qu'il est nul en 1.

2. Soit, par l'absurde, $\phi : B_n \to B_n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et sans point fixe. Montrons qu'on peut construire $\psi : B_n \to S_n$ telle que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\psi(x) = x$ pour tout $x \in S_n$. Cela sera absurde, d'après la première question.

Pour tout x, posons $\psi(x) = x + a(x)(x - \psi(x))$ où $a(x)$ est l'unique réel positif tel que $||x + a(x)(x - \psi(x))|| = 1$.

Montrons d'abord qu'un tel réel existe. Puisque $||x|| \leq 1$ et puisque $\lim\limits_{a \to +\infty} ||x + a(x - \psi(x))|| = +\infty$, l'équation $||x + a(x - \psi(x))||$ a au moins une solution sur $[0; +\infty[$. De même, elle a au moins une solution sur $]-\infty; -1]$.

De plus, l'équation $||x + a(x - \psi(x))|| = 1$ est une équation polynomiale d'ordre 2 en a. Elle a donc au plus deux solutions. Comme on vient de voir qu'il y en avait au moins une positive et une strictement négative, il y a une unique solution positive.

De plus, comme il y a toujours deux solutions distinctes, le discriminant de l'équation polynomiale ne s'annule pas. La solution positive $a(x)$ est donc une fonction $\mathcal{C}^1$ de x. Donc ψ est $\mathcal{C}^1$.

De plus, pour tout $x \in S_n$, $a(x) = 0$ et $\psi(x) = x$.

3. Soit $\phi : B_n \to B_n$ continue. Soit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, de B_n dans B_n, qui converge uniformément vers ϕ.

Pour tout n, ϕ_n admet un point fixe x_n, d'après la question précédente. Quitte à extraire, on peut supposer que x_n converge vers un $x_\infty \in B_n$. Le point x_∞ est un point fixe de ϕ.