Feuille d'exercices n°8

Exercice 1 : questions diverses

1. Soit E un espace vectoriel normé. Soient $x_1, ..., x_n \in E$ linéairement indépendants. Soient $r_1, ..., r_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue telle que $f(x_k) = r_k$ pour tout k.

2. Notons $l_0^\infty = \{u \in l^\infty(\mathbb{N}) \text{ tq } u_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\}$, muni de la norme $||.||_\infty$. Montrer qu'il existe un isomorphisme d'espaces de Banach entre $(l_0^\infty)'$ (l'ensemble des formes linéaires continues sur l_0^∞) et $l^1(\mathbb{N})$.

3. a) Montrer qu'il existe une application linéaire continue $\phi : l^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ telle que :

   1. $\phi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) \geq 0$ si $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   2. $\phi((u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = \phi((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ pour toute $u \in l^\infty(\mathbb{N})$.
   3. $\phi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ si u converge.

b) Que vaut $\phi((0, 1, 0, 1, ...))$?

Exercice 2 : lemme de Farkas

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel.

1. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $e_1, ..., e_m \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble suivant est fermé :

$$C = \left\{\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_m e_m \text{ tq } \alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}^+\right\}$$

[Indication : Procéder par récurrence et distinguer selon qu'il existe ou non $\alpha_1, ..., \alpha_m \geq 0$ tels que $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_m e_m = 0$.]

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Soit $b \in \mathbb{R}^m$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) Il n'existe pas $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_i \geq 0$ pour tout i et $Ax = b$.

(2) Il existe $y \in \mathbb{R}^m$ tel que $({}^tAy)_i \geq 0$ pour tout i et $\langle b, y\rangle < 0$.

[Indication : pour (1)⇒(2), considérer l'ensemble $C = \{Ax \text{ tq } x \in (\mathbb{R}^+)^n\}$ et appliquer un théorème « de séparation des convexes ».]

Exercice 3 : théorème de Krein-Milman

Soit E un espace vectoriel normé. Si $K \subset E$ est convexe, on dit qu'un point $x \in K$ est *extrémal* s'il n'existe pas $y_1, y_2 \in K, t \in]0; 1[$ tels que :

$$x = (1 - t)y_1 + ty_2 \qquad \text{et} \qquad y_1 \neq y_2$$

On dit que $A \subset K$ est une *face* de K si A est convexe et si, pour tous $y_1, y_2 \in K$:

$$\Big(\exists\lambda \in]0; 1[\text{ tq } (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 \in A\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\forall\lambda \in [0; 1], (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 \in A\Big)$$

1. Soit $K \subset E$ convexe et compact. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des faces fermées de K qui sont non-vides. L'inclusion définit un ordre partiel sur $\mathcal{F}$.

a) À l'aide du lemme de Zorn, montrer que $\mathcal{F}$ admet au moins un élément minimal.

b) Montrer que tous les éléments minimaux de $\mathcal{F}$ sont des singletons.

c) En déduire que K admet au moins un point extrémal.

2. Soit toujours $K \subset E$ un convexe compact. On note C l'ensemble de ses points extrémaux. On va montrer que $K = \overline{\mathrm{Conv}(C)}$. Supposons par l'absurde que $\overline{\mathrm{Conv}(C)} \neq K$.
a) Montrer qu'il existe $\phi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue telle que :

$$\overline{\mathrm{Conv}(C)} \cap \{x \in K \text{ tq } \phi(x) = \max_{y \in K} \phi(y)\} = \emptyset$$

b) Montrer que $\{x \in K \text{ tq } \phi(x) = \max_{y \in K} \phi(y)\}$ contient un point extrémal de K et conclure.

3. [Difficile, utile pour la question 3. de l'exercice suivant] Montrer que le théorème est encore vrai si, au lieu d'être normé, E est simplement un espace vectoriel topologique séparé et localement convexe. [Un espace vectoriel topologique est un espace topologique muni d'une structure d'espace vectoriel dont les lois + et . sont continues pour la topologie. Il est localement convexe si tout point admet un système fondamental de voisinages convexes.]

Exercice 4 : le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki
Soit E un espace vectoriel normé. On note E' son dual topologique, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur E.
On appelle *topologie faible-étoile* sur E' la topologie engendrée par la famille d'applications $\phi_x : f \in E' \to f(x) \in \mathbb{R}$, où x varie dans E.

1. Montrer que la topologie faible-étoile est moins fine que la topologie de la norme uniforme.

2. On note B la boule unité fermée de E' pour la norme uniforme.
a) Montrer que, si on munit B de la topologie faible-étoile et $\mathcal{F}(B_E(0,1), [-1;1])$ de la topologie produit, alors l'application suivante est d'image fermée et réalise un homéomorphisme sur son image :

$$\Gamma : f \in B \quad \to f_{|B_E(0,1)} \in \mathcal{F}(B_E(0,1), [-1;1])$$

b) [Banach-Alaoglu-Bourbaki] En déduire que B est compact pour la topologie faible-étoile.

3. a) Montrer que la boule unité fermée de $L^1([0;1], \mathbb{R})$ n'a pas de point extrémal.
b) En utilisant le théorème de Krein-Milman démontré dans l'exercice précédent, montrer qu'il n'existe pas d'espace vectoriel normé dont le dual est isomorphe à $L^1([0;1], \mathbb{R})$.

Exercice 5 : le dual de $\boldsymbol{l^\infty}(\mathbb{N})$
On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions $\sigma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ telles que :
(1) $\sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$ si $A, B \subset \mathbb{N}$ sont disjoints.
(2) σ est bornée.
L'ensemble $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel. On le munit de la norme $||\sigma|| = \sup_{A \subset \mathbb{N}} |\sigma(A)|$.
Pour toute $A \subset \mathbb{N}$, on note $1_A \in l^\infty(\mathbb{N})$ la suite telle que $1_{A,k} = 1$ si $k \in A$ et $1_{A,k} = 0$ sinon

1. a) Pour toute $\sigma \in \mathcal{M}$, montrer qu'il existe une unique application linéaire continue $L_\sigma : l^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ telle que, pour toute $A \subset \mathbb{N}$:

$$L_\sigma(1_A) = \sigma(A)$$

b) Montrer que l'application $\sigma \in \mathcal{M} \to L_\sigma \in (l^\infty(\mathbb{N}))^*$ est un homéomorphisme.

2. On appelle mesures signées finies les fonctions $\sigma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ qui vérifient la propriété (2) et une propriété plus forte que (1) :
(1') $\sigma\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \sigma(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{N}$ deux à deux disjointes.
Montrer que l'ensemble des mesures signées finies est strictement inclus dans $\mathcal{M}$.