Feuille d'exercices n°8

Corrigé

Exercice 1

1. Soit $F = \text{Vect}\{x_1, ..., x_n\}$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de E car de dimension finie. Soit $g : F \to \mathbb{R}$ la forme linéaire telle que $f(x_k) = r_k$ pour tout k. Elle est continue car la dimension de F est finie. Notons M sa norme opérateur.
Soit $p : x \in E \to M||x|| \in \mathbb{R}$. C'est une application convexe telle que $g \leq p_{|F}$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f_{|F} = g$ et $f \leq p$ sur E. Cette application est continue (de norme M) et vérifie, pour tout k, $f(x_k) = g(x_k) = r_k$.

2. L'espace l_0^∞ est de Banach car c'est un fermé d'un espace de Banach.
Soit $\phi : l^1(\mathbb{N}) \to (l_0^\infty)'$ l'application qui à u associe :

$$\phi(u) : v \in l_0^\infty \to \sum_n u_n v_n$$

Cette application est bien définie et c'est une isométrie : pour toute $u \in l^1(\mathbb{N})$, l'application $\phi(u)$ est continue et sa norme vaut $||u||_1$.
En effet, pour toute $v \in l_0^\infty$, $\left|\sum_n u_n v_n\right| \leq ||v||_\infty ||u||_1$. De plus, si on pose, pour tout N, $v^{(N)}$ la suite telle que $v_k^{(N)} = \text{signe}(u_k)$ si $k \leq N$ et $v_k^{(N)} = 0$ si $k > N$:

$$\phi(u)(v) = \left(\sum_{n \leq N} |u_n|\right) ||v||_\infty$$

donc $|||\phi(u)||| \geq \left(\sum_{n \leq N} |u_n|\right)$. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $|||\phi(u)||| \geq ||u||_1$.
Montrons que c'est une application surjective. Soit $\lambda \in (l_0^\infty)'$. On va montrer que $\lambda = \phi(u)$ pour une $u \in l^1(\mathbb{N})$.
Pour tout n, notons e_n la suite dont tous les coefficients sont nuls sauf le n-ième qui vaut 1.
Posons u la suite telle que $u_n = \lambda(e_n)$.
La suite u est dans l^1. En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n \leq N} |u_n| = \lambda \left(\sum_{n \leq N} \text{signe}(u_n) e_n\right) \leq |||\lambda|||$$

De plus, λ et $\phi(u)$ sont égales sur l'ensemble des suites stationnaires en 0. Cet ensemble est dense dans l_0^∞ donc λ et $\phi(u)$ sont égales.

3. a) Soit $F \subset l^\infty(\mathbb{N})$ le sous-espace vectoriel constitué des suites convergentes.

Soit $G = \{(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tq } u \in l^\infty(\mathbb{N})\}$.
Soit $\lambda : F + G \to \mathbb{R}$ l'application linéaire telle que :

$$\begin{aligned}\lambda(u) &= \lim_{n\to+\infty} u_n \text{ si } u \in F\\ &= 0 \text{ si } u \in G\end{aligned}$$

Cette définition est correcte car les deux valeurs coïncident sur $F \cap G$. En effet, si $u_{n+1} - u_n$ converge vers une limite L lorsque $n \to +\infty$, alors $L = 0$, sinon $u_n \sim Ln$ quand $n \to +\infty$ donc u n'est pas bornée.
Soit $p : l^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ l'application $p(u) = \sup\limits_n u_n$. C'est une application convexe et $\lambda(u) \le p(u)$ sur $F + G$: lorsque $u \in F$, c'est clair. De plus, pour toute $u \in l^\infty$, $\sup\limits_n (u_{n+1} - u_n) \ge 0$, sinon il existe $l < 0$ tel que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n < l$. Cela implique que $u_n \le u_0 - ln$ pour tout n, ce qui est en contradiction avec le fait que u est bornée.
D'après le théorème de Hahn-Banach, λ se prolongue donc sur tout $l^\infty(\mathbb{N})$ en une forme linéaire inférieure à p. On note ϕ cette forme linéaire. Elle est continue car, pour toute u, $\phi(u) \le p(u) \le ||u||_\infty$.
On a, pour toute $u \le 0$, $\phi(u) \le \sup\limits_n u_n \le 0$. On doit donc avoir aussi, pour toute $u \ge 0$, $\phi(u) \ge 0$. La fonction ϕ vérifie donc la propriété 1. Par définition de λ, elle vérifie aussi les propriétés 2. et 3.
b) $\phi((0,1,0,1,...)) = \frac{\phi((0,1,0,1,...))+\phi((1,0,1,0,...))}{2} = \frac{\phi((1,1,1,...))}{2} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

1. Procédons par récurrence sur m. Pour $m = 1$, c'est vrai. Supposons qu'on l'a montré pour $m - 1$ et montrons-le pour m.

Premier cas : il n'existe pas $\alpha_1, ..., \alpha_m \ge 0$ non tous nuls tels que $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_m e_m = 0$.
Dans ce cas, $\min\{||\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_m e_m|| \text{ tq } \alpha_1, ..., \alpha_m \ge 0, \sup\limits_k \alpha_k = 1\}$ est atteint (minimum sur un compact d'une fonction continue) et strictement positif. Notons M ce minimum. Alors, pour tous $\alpha_1, ..., \alpha_m \ge 0$:

$$||\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_m e_m|| \ge M \sup_{k\le m} \alpha_k$$

Donc si $(\alpha_1^{(n)} e_1 + ... + \alpha_m^{(n)} e_m)$ converge vers un $x \in \overline{C}$, chacune des suites $(\alpha_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Quitte à extraire, on peut donc supposer qu'elles convergent vers des limites $\alpha_k^\infty \ge 0$. On a alors $x = \alpha_1^\infty e_1 + ... + \alpha_m^\infty e_m$ donc $x \in C$.

Deuxième cas : il existe $\alpha_1^0, ..., \alpha_m^0 \ge 0$ non tous nuls tels que $\alpha_1^0 e_1 + ... + \alpha_m^0 e_m = 0$.
Montrons que $C = \bigcup\limits_{k\le m} \{\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_{k-1} e_{k-1} + \alpha_{k+1} e_{k+1} + ... + \alpha_m e_m \text{ tq } \alpha_1, ..., \alpha_m \ge 0\}$. Cela permet de conclure, par hypothèse de récurrence : C est une union finie de fermés donc un fermé.
Soit $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_m e_m \in C$. Si au moins l'un des α_k est nul, cet élément appartient à l'union voulue. Supposons donc que $\alpha_k > 0$ pour tout k.
Soit alors i tel que $\frac{\alpha_i}{\alpha_i^0} = \min\limits_k \frac{\alpha_k}{\alpha_k^0}$ (où, par convention, $\frac{\alpha_k}{\alpha_k^0} = +\infty$ si $\alpha_k^0 = 0$).

Alors :

$$\begin{aligned}\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_m e_m &= \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_m e_m - \frac{\alpha_i}{\alpha_i^0}(\alpha_1^0 e_1 + ... + \alpha_m^0 e_m) \\ &= \sum_k (\alpha_k - \alpha_k^0 \frac{\alpha_i}{\alpha_i^0}) e_k \\ &\in \{\beta_1 e_1 + ... + \beta_{i-1}e_{i-1} + \beta_{i+1}e_{i+1} + ... + \beta_m e_m \text{ tq } \beta_1, ..., \beta_m \geq 0\}\end{aligned}$$

2. Si (2) est vraie, soit un y comme dans (2). Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_i \geq 0$ pour tout i, $\langle Ax, y\rangle = \langle x, {}^tAy\rangle \geq 0$. On ne peut donc pas avoir $Ax = b$, car $\langle b, y\rangle < 0$. Donc (1) est vraie.
Supposons maintenant que (1) est vraie et montrons que (2) aussi.
Posons $C = \{Ax \text{ tq } x \in (\mathbb{R}^+)^n\}$. C'est un convexe de $\mathbb{R}^m$ et il est fermé d'après la première question : $C = \{\alpha_1 A_1 + ... + \alpha_m A_m \text{ tq } \alpha_1, ..., \alpha_m \geq 0\}$, si on note $A_1, ..., A_m$ les colonnes de A.
Puisque (1) est vraie, $b \notin C$. D'après un corollaire du théorème de Hahn-Banach, il existe $a_1 < a_2$ et $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $\phi(b) = a_1$ et, pour tout $x \in C$, $a_2 \leq \phi(x)$.
Puisque $0 \in C$, $a_2 \leq \phi(0) = 0$ donc $a_1 < 0$.
Soit $y \in \mathbb{R}^m$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $\phi(x) = \langle x, y\rangle$. Pour ce y, $\langle b, y\rangle = \phi(b) = a_1 < 0$.
De plus, pour tout $x \in (\mathbb{R}^+)^n$, $Ax \in C$ donc $\langle y, Ax\rangle \geq a_2$. Puisque, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $tAx \in C$, cela veut dire que $t\langle y, Ax\rangle \geq a_2$ quel que soit t. En faisant tendre t vers $+\infty$, cela implique que $\langle y, Ax\rangle \geq 0$.
On doit donc avoir, pour tout $x \in (\mathbb{R}^+)^n$, $\langle {}^tAy, x\rangle \geq 0$. Les coordonnées de ${}^tAy$ doivent donc toutes être positives.

Exercice 3

1. a) Montrons que toute famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{F}$ admet un minorant dans $\mathcal{F}$. Soit donc $(U_i)_{i\in I}$ une famille de faces fermées totalement ordonnée pour l'inclusion.
Puisque K est compact, $\bigcap_i U_i$ est non-vide. Cet ensemble est fermé (c'est une intersection de fermés), convexe (c'est une intersection de convexes).
De plus, pour tous $y_1, y_2 \in K$, s'il existe $\lambda \in]0;1[$ tel que $(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \in \bigcap_i U_i$, alors, pour tout i, $(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \in U_i$. Puisque les U_i sont des faces, $(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \in U_i$ pour tout $\lambda \in [0;1]$ et tout i. Donc, pour tout $\lambda \in [0;1]$, $(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \in \bigcap_i U_i$.
Donc $\bigcap_i U_i$ est une face. C'est ainsi un élément de $\mathcal{F}$, inférieur pour l'inclusion à chacun des U_i.
Donc $\mathcal{F}$ est un ensemble inductif. D'après le lemme de Zorn, il admet un élément minimal.
b) Soit A un élément minimal de $\mathcal{F}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $y_1, y_2 \in A$ deux éléments différents.
Soit $\phi : \text{Vect}\{y_1 - y_2\} \to \mathbb{R}$ l'application linéaire telle que $\phi(y_1 - y_2) = 1$. D'après le théorème de Hahn-Banach, cette application se prolonge une une forme linéaire continue définie sur tout E, qu'on note encore ϕ. On a $\phi(y_1) \neq \phi(y_2)$ car $\phi(y_1 - y_2) \neq 0$.
L'ensemble A, étant fermé, est compact. La fonction ϕ atteint donc son maximum sur A. Notons m ce maximum. Soit $A' = \{x \in A \text{ tq } \phi(x) = m\}$. Puisque ϕ n'est pas constante sur A, $A' \subsetneq A$.
L'ensemble A' est fermé car ϕ est continue. C'est un convexe car A l'est et ϕ est linéaire. C'est un ensemble non-vide car on a dit que le maximum était atteint. De plus, c'est une face : si $y_1, y_2 \in K$ et $\lambda \in]0;1[$ sont tels que $(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \in A'$, on doit avoir $y_1 \in A$

et $y_2 \in A$ car A est une face. On a donc en particulier $\phi(y_1) \leq m$ et $\phi(y_2) \leq m$. Puisque $m = \phi((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) = (1-\lambda)\phi(y_1) + \lambda\phi(y_2)$, on a alors $\phi(y_1) = \phi(y_2) = m$. Donc $y_1, y_2 \in A'$ et, pour tout $\lambda \in [0;1]$, $(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \in A'$.
L'ensemble A' appartient donc à $\mathcal{F}$ et il est strictement inférieur à A. C'est absurde.
c) D'après les questions précédentes, il existe $x \in K$ tel que $\{x\}$ est un élément minimal de $\mathcal{F}$. Un tel x est un point extrémal (sinon $\{x\}$ n'est pas une face).

2. a) Soit $x_0 \in K - \overline{\mathrm{Conv}(C)}$.
L'ensemble $\overline{\mathrm{Conv}(C)}$ est un convexe fermé. Il est inclus dans un compact donc il est compact. La distance de x_0 à ce compact est atteinte donc strictement positive.
D'après un corollaire du théorème de Hahn-Banach, il existe donc $\phi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue telle que, pour un certain $a < \phi(x_0)$:

$$\forall x \in \overline{\mathrm{Conv}(C)}, \phi(x) \leq a$$

Le maximum de ϕ sur K n'est pas atteint en un point de $\overline{\mathrm{Conv}(C)}$.
b) Notons D cet ensemble. Il est convexe, non-vide et fermé (car ϕ est continue). Il est compact (c'est un fermé d'un compact) donc il admet un point extrémal (d'après la question 1.). Soit x_0 un tel point. Montrons que x_0 est aussi un point extrémal de K.
S'il existe $y_1, y_2 \in K, t \in]0;1[$ tels que $(1-t)y_1 + ty_2 = x_0$, on doit avoir $(1-t)\phi(y_1) + t\phi(y_2) = \phi(x_0) = \max\limits_{y \in K} \phi(y)$. Donc $\phi(y_1) = \phi(y_2) = \max\limits_{y \in K} \phi(y)$. Donc $y_1, y_2 \in D$. Puisque x_0 est un point extrémal de D, $y_1 = y_2$.
On doit donc avoir $x_0 \in C$. C'est en contradiction avec la question a).

3. On n'a utilisé le fait que E était normé que dans les questions 1.b) et 2.a), pour appliquer le théorème de Hahn-Banach. Il suffit donc de montrer que, dans ces deux cas, le théorème de Hahn-Banach pouvait s'appliquer même sans que l'espace soit normé.

Pour la question 1.b), on a utilisé le fait que, si $x \in E - \{0\}$, il existe une forme linéaire continue ϕ sur E telle que $\phi(x) = 1$. Montrons que c'est encore vrai si E est seulement séparé et localement convexe.
Soit V un voisinage de 0 ne contenant pas x. Puisque E est localement convexe, on peut supposer que V est convexe. Quitte à considérer $V \cap (-V)$ à la place de V, on peut aussi supposer que V est symétrique.
Soit p la fonction qui vaut 1 sur V et $+\infty$ sur $E - V$. C'est une fonction convexe car V est convexe. Soit $f : \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ l'application linéaire telle que $f(x) = 1$. On a $f \leq p$.
D'après le théorème de Hahn-Banach, l'application f se prolonge donc à E en une application linéaire inférieure ou égale à p, qu'on note ϕ. Il faut montrer que ϕ est continue.
Pour tout $y \in V$, $\phi(y) \leq p(y) = 1$ et $\phi(-y) \leq p(-y) = 1$. Donc $\phi(y) \in [-1;1]$. L'application ϕ est donc continue en 0 : pour tout $\epsilon > 0$, $|\phi| \leq \epsilon$ sur ϵV (et ϵV est un voisinage de 0 car ϵV est l'antécédant de V par l'application continue $y \to y/\epsilon$). Pour tous $x_0 \in E, y \in E$, $\phi(y) = \phi(x_0) + \phi(y - x_0)$ donc, par continuité de l'application $y \to y - x_0$, la continuité de ϕ en 0 implique sa continuité en x_0.

Dans la question 2.a), on a utilisé le fait que, si D est un convexe compact et $x_0 \notin D$, alors il existe $\phi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue et $a < \phi(x_0)$ tels que, pour tout $x \in D$, $\phi(x) \leq a$. Montrons ce résultat lorsque E n'est pas normé.

Quitte à translater, on peut supposer que $0 \in D$.
Notons $D - x_0 = \{d - x_0 \text{ tq } d \in D\}$ et posons $W = {}^c(D - x_0)$. C'est un ouvert qui contient 0. Puisque l'opération $-$ est continue en $(0,0)$, il existe V, V' deux voisinages de 0 tels que $\{y_1 - y_2 \text{ tq } y_1 \in V, y_2 \in V'\} \subset W$. Quitte à les prendre un peu plus petits, on peut supposer que V' est convexe.
Posons $D' = \{z + y \text{ tq } z \in D, y \in V'\}$. C'est un convexe contenant 0. Son intérieur contient également zéro (car $V' \subset D'$, puisque $0 \in D$).
De plus, il n'a pas d'intersection avec $x_0 + V$: si $z \in D, y \in V', y_2 \in V$, $z + y \neq x_0 + y_2$, sinon $z - x_0 = y_2 - y \in W$, ce qui est impossible car W n'a pas d'intersection avec $D - x_0$.
Soit $t_0 = \sup\{t \geq 0 \text{ tq } tx_0 \in D'\}$. On a $t_0 < 1$, sinon $x_0 \in \overline{D'}$, ce qui est en contradiction avec le fait que x_0 admet un voisinage, $x_0 + V$, qui est disjoint de D'. Soit $f : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ l'application linéaire telle que $f(x_0) = 1/t_0$.
Soit p l'application convexe qui vaut 1 sur D' et $+\infty$ sur $E - D'$. On peut vérifier que $f \leq p$. D'après le théorème de Hahn-Banach, l'application f se prolonge en une application linéaire ϕ inférieure ou égale à p.
L'application ϕ est continue car D' contient un voisinage de 0 (et on peut alors raisonner comme dans la première partie de la question). Elle est inférieure ou égale à 1 sur D alors qu'elle est strictement supérieure à 1 en x_0.

Exercice 4

1. La topologie faible-étoile est, par définition de la topologie engendrée par une famille d'applications, la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications ϕ_x, pour $x \in E$.
Pour la topologie uniforme, les applications ϕ_x sont toutes continues : pour toute $f \in E'$, $||\phi_x(x)|| \leq ||x||.||f||$ donc, pour tout $x \in E$, ϕ_x est continue de norme opérateur $||x||$.
Donc la topologie uniforme est plus fine que la topologie faible-étoile.

2. a) Montrons d'abord que l'image est fermée. L'image est constituée de toutes les fonctions de $B_E(0,1)$ vers $[-1;1]$ qui sont linéaires, c'est-à-dire qui vérifient les conditions suivantes :
– $\forall x \in B_E(0,1), \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \lambda x \in B_E(0,1), f(\lambda x) = \lambda f(x)$
– $\forall x, y \in B_E(0,1) \text{ tq } x + y \in B_E(0,1), f(x + y) = f(x) + f(y)$
Cette image s'écrit donc comme une intersection d'antécédants de fermés par des applications linéaires continues. C'est donc un fermé.
L'application Γ est continue car, si on la compose avec n'importe laquelle des projections qui définissent la topologie produit sur $\mathcal{F}(B_E(0,1), [-1;1])$, on obtient une application de la forme ϕ_x, avec $x \in B_E(0,1)$, ce qui est une application continue sur B muni de la topologie faible-étoile.
Elle est injective : si $\Gamma(f) = \Gamma(g)$, alors f et g coïncident sur $B_E(0,1)$, donc sont égales sur tout E.
La fonction Γ admet donc une réciproque sur son image, qu'on note Δ. Montrons que Δ est continue. Il faut montrer que, pour tout $x \in E$, $\phi_x \circ \Delta$ est continue. Pour toute $f \in \operatorname{Im}\Gamma$, $\Delta(f)$ est une application linéaire continue qui coïncide avec f sur $\mathcal{B}_E(0,1)$.
Pour toute $f \in \operatorname{Im}\Gamma$, $\phi_x(\Delta(f)) = \Delta(f)(x) = f(x)$ si $||x|| < 1$ et $\phi_x(\Delta(f)) = \Delta(f)(x) = 2||x||f(x/(2||x||))$ sinon. Dans les deux cas, c'est bien une application continue de $\operatorname{Im}\Gamma$ vers $\mathbb{R}$.

b) L'ensemble $\mathcal{F}(B_E(0,1),[-1;1])$ est compact, d'après le théorème de Tychonov. L'image de B par Γ est donc également compacte car on a vu qu'elle était fermée. Puisque Γ réalise un homéomorphisme de B sur son image, B est compacte.

3. a) Notons B la boule unité.
Soit par l'absurde f un point extrémal de B. On a nécessairement $||f||_1 = 1$. En effet, sinon, pour $\epsilon > 0$ assez petit, $f+\epsilon \in B$ et $f-\epsilon \in B$. Comme $f = \frac{(f+\epsilon)+(f-\epsilon)}{2}$, f est donc barycentre de deux points distincts de B. Ce n'est donc pas un point extrémal.
L'application $x \to \int_0^x |f(t)|dt$ est continue. Puisqu'elle vaut 0 en 0 et 1 en 1, il existe $r \in]0;1[$ tel que $\int_0^r |f(t)|dt = 1/2$.
Posons alors $g_1 = 2f.1_{|[0;r]}$ et $g_2 = 2f.1_{|]r;1]}$. Ce sont deux fonctions distinctes de L^1 et :

$$f = \frac{g_1 + g_2}{2}$$

Donc f n'est pas un point extrémal. C'est absurde.
b) On commence par vérifier que, pour tout E normé, E' est un espace vectoriel topologique séparé et localement convexe pour la topologie faible-étoile.
Il est séparé : si $f \neq g$, il existe x tel que $f(x) \neq g(x)$. Soient U_1, U_2 des ouverts disjoints de $\mathbb{R}$ dont l'un contient $f(x)$ et l'autre $g(x)$. Alors $\phi_x^{-1}(U_1)$ et $\phi_x^{-1}(U_2)$ sont des ouverts disjoints de E' dont l'un contient f et l'autre g.
C'est un espace vectoriel topologique : montrons que $+ : E' \times E' \to E'$ est continue. Il suffit de montrer que, pour tout $x \in E$, $\phi_x \circ +$ est continue, c'est-à-dire que l'application $f, g \to f(x) + g(x)$ est continue pour la topologie faible-étoile sur E'. Elle l'est car c'est la composée de l'application $+$ sur $\mathbb{R}^2$, qui est continue, et de l'application $\phi_x \times \phi_x : E' \times E' \to \mathbb{R}^2$, qui est aussi continue. La démonstration de la continuité de la loi externe est similaire.
Il est localement convexe : l'ensemble des $\phi_{x_1}^{-1}(U_1) \cap ... \cap \phi_{x_n}^{-1}(U_n)$ où les $U_1, ..., U_n$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$ forme une base de la topologie faible-étoile, constituée uniquement d'ouverts convexes.

Si $L^1([0;1],\mathbb{R})$ était isomorphe au dual d'un certain espace vectoriel normé, B serait, d'après la question 2. et le raisonnement qu'on vient de faire, un convexe compact dans un espace vectoriel topologique séparé et localement convexe. D'après l'exercice 3, il serait donc l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. En particulier, il admettrait des points extrémaux. Puisque ce n'est pas le cas, $L^1([0;1],\mathbb{R})$ n'est pas isomorphe au dual d'un espace vectoriel normé.

Exercice 5

1. a) Si $A_1, ..., A_n, A'_1, ..., A'_m$ sont des parties finies de $\mathbb{N}$ et $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_m$ des réels tels que :

$$\sum_{k \leq n} \alpha_k 1_{A_k} = \sum_{k \leq m} \beta_k 1_{A'_k}$$

alors on a, en notant $E = \{U_1 \cap ... \cap U_n \cap V_1 \cap ... \cap V_m \text{ tq } \forall k, U_k = A_k \text{ ou } {}^cA_k, V_k = A'_k \text{ ou } {}^cA'_k\}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\leq n} \alpha_k \sigma(A_k) &= \sum_{k\leq n} \alpha_k \sum_{S\in E, S\subset A_k} \sigma(S) \\
&= \sum_{S\in E} \sigma(S) \sum_{k \text{ tq } S\subset A_k} \alpha_k \\
&= \sum_{S\in E} \sigma(S)(\alpha_1 1_{A_1} + ... + \alpha_n 1_{A_n})(S) \\
&= \sum_{S\in E} \sigma(S)(\beta_1 1_{A'_1} + ... + \beta_m 1_{A'_m})(S) \\
&= \sum_{k\leq m} \beta_k \sigma(A'_k)
\end{aligned}$$

donc l'application $1_A \to \sigma(A)$ se prolonge linéairement (de manière unique) à l'ensemble des combinaisons linéaires finies de 1_A. Comme cet ensemble est dense dans $l^\infty(\mathbb{N})$ (il s'agit de l'ensemble des suites qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs), il suffit de montrer que la fonction linéaire définie sur cet espace est continue et on aura alors qu'elle se prolonge uniquement en une application linéaire continue sur tout $l^\infty(\mathbb{N})$.
Soit u une suite ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Soient $s_1, ..., s_n$ les valeurs, rangées par ordre strictement croissant. Soit, pour tout k, $A_k = \{x \in \mathbb{N} \text{ tq } u_x \geq s_k\}$.
Alors $u = s_1 1_{A_1} + (s_2 - s_1) 1_{A_2} + ... + (s_n - s_{n-1}) 1_{A_n}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
L_\sigma(u) &= s_1 \sigma(1_{A_1}) + (s_2 - s_1)\sigma(1_{A_2}) + ... \\
&\leq (|s_1| + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + ...)||\sigma|| \\
&= (|s_1| - s_1 + s_n)||\sigma|| \leq 3||u||_\infty ||\sigma||
\end{aligned}$$

Donc L_σ est continue.
b) On a vu que c'était une application continue à la question précédente : $|||L_\sigma||| \leq 3||\sigma||$ pour tout σ.
Elle est injective. Elle est surjective : si $f \in (l^\infty(\mathbb{N}))^\star$, la fonction $\sigma : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to f(1_A)$ vérifie les propriétés (1) et (2) et on a $f = L_\sigma$.
Sa réciproque est l'application qui, à $f \in (l^\infty(\mathbb{N}))^\star$, associe $\sigma : A \to f(1_A)$. C'est une application continue et même 1-lipschitizienne : pour tout A, $|\sigma(A)| = |f(1_A)| \leq ||f||$ donc $||\sigma|| \leq ||f||$. La fonction considérée est donc un homéomorphisme.

2. L'inclusion est claire. Montrons qu'elle est stricte.
Il suffit de montrer qu'il existe $f \in (l^\infty(\mathbb{N}))^\star$ telle que $f \neq L_\sigma$ pour toute mesure σ signée et finie.
Soit par exemple f telle que $f(u) = \lim_{n\to+\infty} u_n$ si u converge. On sait qu'une telle fonction existe (c'est dans le cours et on l'a redémontré dans la question 3 de l'exercice 1).
Soit $\sigma \in \mathcal{M}$ telle que $L_\sigma = f$. Montrons que σ n'est pas une mesure signée finie.
Pour tout $x \in \mathbb{N}$, $\sigma(\{x\}) = f(1_{\{x\}}) = 0$.
De plus, $\sigma(\mathbb{N}) = f(1_\mathbb{N}) = 1$.
Donc $\sigma(\mathbb{N}) = \sigma\left(\bigcup_{x\in\mathbb{N}} \{x\}\right) \neq \sum_{x\in\mathbb{N}} \sigma(\{x\})$.