Feuille d'exercices n$^{\mathrm{o}}$9

Exercice 1 : questions diverses

1. Parmi les espaces de Banach suivants, lesquels sont réflexifs ?

$$l^p(\mathbb{N}) \ (p \in]1; +\infty[) \qquad l^1(\mathbb{N}) \qquad l^\infty(\mathbb{N})$$

2. a) Soit E un espace de Banach réflexif. Soit $Y \subset E'$. Montrer que $\overline{\mathrm{Vect}\,(Y)} = Y^{\circ\perp}$.
b) Donner un contre-exemple à cette propriété dans un espace de Banach non-réflexif.
c) Montrer plus généralement que cette propriété n'est vraie dans aucun espace de Banach non-réflexif.

3. [Lemme de Mazur, à ne faire qu'après l'exercice 2] Montrer que si C est un convexe d'un espace vectoriel normé E, alors son adhérence au sens de la topologie faible est la même que son adhérence au sens de la topologie forte.

Exercice 2 : convergence faible et propriété de Schur

1. Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. On appelle *topologie faible* sur E la topologie engendrée par l'ensemble des formes linéaires continues sur E.
a) Montrer que la topologie faible est moins fine que la topologie induite sur E par sa norme (qu'on appelle *topologie forte*). Montrer aussi qu'une suite qui converge pour la topologie forte converge pour la topologie faible.
b) Donner un exemple d'une suite d'éléments de $(l^2(\mathbb{N}), ||.||_2)$ qui converge pour la topologie faible mais pas pour la topologie forte.

2. [Propriété de Schur] Dans cette question, on suppose fixée une suite $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$ faiblement convergente. On veut montrer qu'elle est aussi fortement convergente. C'est un résultat dû à Schur.
Quitte à soustraire la limite, on peut supposer qu'elle converge faiblement vers 0.
On raisonne par l'absurde et on suppose que la suite ne converge pas fortement vers 0. Alors, quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout n, $||u^{(n)}||_1 \geq \eta$.
a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k^{(n)} \to 0$ quand $n \to +\infty$
b) Soit $\epsilon \in]0; \eta/2[$. Montrer qu'il existe $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers et $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des parties finies de $\mathbb{N}$, disjointes deux à deux, telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{s\in S_k} |u_s^{(n_k)}| \geq ||u^{(n_k)}||_1 - \epsilon$$

c) Trouver une contradiction.

Exercice 3 Opérateurs de Hilbert-Schmidt
Soit H un espace de Hilbert.

1. Soient $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$ deux bases hilbertiennes de H. Montrer que, pour tout opérateur linéaire continu A de H dans lui-même, on a

$$\sum_{i\in I}\|Ae_i\|^2 = \sum_{j\in J}\|A^*f_j\|^2.$$

En déduire que, si A est un opérateur linéaire de H dans lui-même, la quantité

$$\|A\|_{\mathcal{HS}} := \left(\sum_{i\in I}\|Ae_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

est indépendante du choix de la base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$. Lorsque cette quantité est finie, on dit que A est un *opérateur de Hilbert-Schmidt*. On notera $\mathcal{HS}(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H.

2. Montrer que $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$ définit une norme sur $\mathcal{HS}$, et que l'on a $\|A\|_{\mathcal{HS}} \geq |||A|||$ pour tout A.

3. Si A et B sont deux opérateurs continus, montrer que l'opérateur $A\circ B$ est de Hilbert-Schmidt dès que l'un des opérateurs A ou B est de Hilbert-Schmidt.

4. Montrer que $\mathcal{HS}(H)$, muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$, est un espace de Hilbert.

5. Montrer que tout opérateur de rang fini est de Hilbert-Schmidt. Montrer que les opérateurs de rang finis sont denses dans $\mathcal{HS}(H)$ (pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$), et que les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont des opérateurs compacts.

On suppose maintenant que $H = L^2(X,\mu)$ où μ est une mesure σ-finie sur un espace mesurable $(X,\mathcal{B})$. Pour $K\in L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)$, on considère l'opérateur sur H défini par

$$A_K(f)(x) := \int_X K(x,y)f(y)d\mu(y).$$

[Une mesure σ-finie est une mesure pour laquelle X peut s'écrire comme une union de sous-ensembles de mesure finie. Cette propriété permet d'appliquer le théorème de Fubini.]

6. Vérifier que A_K est un opérateur linéaire continu de H dans lui-même, pour tout $K \in L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)$. À quelle condition est-il auto-adjoint ?

7. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. Montrer que la famille $(e_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ définie par $e_{i,j}(x,y) = e_i(x)e_j(y)$ est une base hilbertienne de $L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)$.

8. En utilisant les bases hilbertiennes $(e_i)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$, montrer que

$$\|A_K\|_{\mathcal{HS}} = \|K\|_{L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)}$$

pour $K\in L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)$. En particulier, A_K est un opérateur de Hilbert-Schmidt pour tout $K\in L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)$.

9. Réciproquement, montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt $A\in\mathcal{HS}(H)$ est de la forme A_K pour un certain $K\in L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)$.

L'application $K\mapsto A_K$ définit donc une bijection isométrique entre $L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)$ et $\mathcal{HS}(H)$.

Exercice 4 : bases de Schauder

Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach de dimension infinie.

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'éléments de E. On dit que c'est une *base de Schauder* de E si, pour tout $x \in E$, il existe une unique suite $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\left|\left|x - \sum_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n\right|\right| \to 0 \qquad \text{quand } N \to +\infty$$

1. a) Montrer que, pour tout $p \in [1; +\infty[$, $l^p(\mathbb{N})$ admet une base de Schauder.

b) Montrer que si un espace E admet une base de Schauder, alors il est séparable. En déduire que $l^\infty(\mathbb{N})$ n'admet pas de base de Schauder.

2. Dans cette question, on suppose que E admet une base de Schauder, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $x \in E$, on pose $M(x) = \sup\limits_{N\in\mathbb{N}} \left|\left|\sum\limits_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n\right|\right|$.

a) Montrer que, pour tout x, $M(x) \geq ||x||$ et que M est une norme.

[Indication : montrer d'abord que les α_n sont des applications linéaires.]

b) Montrer que (E, M) est complet.

c) Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $M(x) \leq K||x||$ pour tout $x \in E$.

3. Montrer qu'une famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments non-nuls de E est une base de Schauder si et seulement si elle satisfait les deux conditions suivantes :

(1) $\overline{\text{Vect}\,\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = E$

(2) Il existe $K > 0$ tel que, pour tous entiers N, N' avec $0 \leq N < N'$ et pour tous réels $a_1, ..., a_{N'}$:

$$\left|\left|\sum_{n\leq N} a_n e_n\right|\right| \leq K \left|\left|\sum_{n\leq N'} a_n e_n\right|\right|$$

4. [Base de Schauder du dual] On suppose que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder de E. On va donner une condition sous laquelle les applications $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associées sont une base de Schauder de E'.

a) Montrer que, pour tout n, α_n est une forme linéaire continue.

b) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons $E_N = \{x \text{ tq } \alpha_n(x) = 0 \text{ si } n < N\}$.

Montrer que, si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder de E', alors la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall f \in E' \qquad ||f_{|E_N}|| \to 0 \text{ quand } N \to +\infty$$

c) Montrer la réciproque.