Feuille d'exercices n$^{\mathrm{o}}$9

Corrigé

Exercice 1

1. Si $1 < p < +\infty$, alors $l^p(\mathbb{N})$ est réflexif. En effet, soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Notons

$$\begin{aligned} \gamma_p : l^q(\mathbb{N}) &\to (l^p(\mathbb{N}))' \\ u &\to \left(v \to \sum_n u_n v_n \right) \end{aligned}$$

On définit de même γ_q. On sait que ces deux applications sont des isomorphismes.
Soit $J_p : l^p(\mathbb{N}) \to (l^p(\mathbb{N}))''$ l'application telle que $J_p(u)(f) = f(u)$ pour toutes $u \in l^p(\mathbb{N}), f \in (l^p(\mathbb{N}))'$.
Remarquons que $\gamma_p^* \circ J_p = \gamma_q$. En effet, pour toutes $u \in l^p(\mathbb{N}), v \in l^q(\mathbb{N})$:

$$((\gamma_p^* \circ J_p)(u))(v) = (J_p(u) \circ \gamma_p)(v) = J_p(u) \left(w \in l^p(\mathbb{N}) \to \sum_n w_n v_n \right) = \sum_n u_n v_n = \gamma_q(u)(v)$$

Puisque γ_p est un isomorphisme, γ_p^* l'est aussi. L'application γ_q étant aussi un isomorphisme, l'application $J_p = (\gamma_p^*)^{-1} \circ \gamma_q$ est un isomorphisme.
L'espace $l^1(\mathbb{N})$ n'est pas réflexif.
Définissons, comme précédemment

$$\begin{aligned} \gamma_\infty : l^1(\mathbb{N}) &\to (l^\infty(\mathbb{N}))' \\ u &\to \left(v \to \sum_n u_n v_n \right) \end{aligned}$$

On définit γ_1 de manière similaire. On sait que γ_1 est un homéomorphisme mais pas γ_∞.
Soit $J_1 : l^1(\mathbb{N}) \to (l^1(\mathbb{N}))''$ l'application telle que, pour toute $u \in l^1(\mathbb{N})$, $J_1(u)(f) = f(u)$. De même que précédemment, $\gamma_1^* \circ J_1 = \gamma_\infty$.
Comme γ_1^* est un homéomorphisme mais pas γ_∞, J_1 ne peut pas l'être.

On sait qu'un espace de Banach est réflexif si et seulement si son dual l'est. On vient de voir que $l^1(\mathbb{N})$ n'était pas réflexif. Son dual ne l'est donc pas non plus. Comme son dual est isomorphe à $l^\infty(\mathbb{N})$ en tant qu'espace de Banach, $l^\infty(\mathbb{N})$ ne l'est pas non plus.

2. a) On note $Y^\perp$ l'orthogonal de Y dans E''. On sait que $\overline{\mathrm{Vect}\,(Y)} = Y^{\perp\circ}$.
Pour toute $U \subset E'$, $U^\perp = J_E(U^\circ)$. En effet, $J_E(U^\circ) \subset U^\perp$: si $x \in U^\circ$, alors, pour toute $f \in U$, $f(x) = 0$ donc $J_E(x)(f) = 0$, ce qui implique $J_E(x) \in U^\perp$. Réciproquement, si $\phi \in U^\perp$, il existe $x \in E$ tel que $\phi = J_E(x)$, car J_E est surjective. Alors $x \in U^\circ$ car, pour toute $f \in U$, $f(x) = J_E(x)(f) = \phi(f) = 0$. Donc $\phi \in J_E(U^\circ)$.

On a aussi que, pour toute $V \subset E$, $J_E(V)^\circ = V^\perp$: $f(x) = 0, \forall x \in V$ est équivalent à $J_E(x)(f) = 0, \forall x \in V$, soit $g(f) = 0, \forall g \in J_E(V)$.
Donc $Y^{\circ\perp} = J_E(Y^\circ)^\circ = Y^{\perp\circ} = \overline{\mathrm{Vect}\,(Y)}$.
b) Prenons $E = l^1$. Soit $\phi : l^\infty \to (l^1)'$ l'isomorphisme $\phi(u)(v) = \sum_n u_n v_n$. Posons $Y = \phi(l_0^\infty)$ (où l_0^∞ désigne l'ensemble des suites de l^∞ qui tendent vers 0 en $+\infty$). C'est un sous-espace vectoriel fermé de $(l^1)'$ puisque l_0^∞ est un sous-espace vectoriel fermé de l^∞. Il n'est pas égal à $(l^1)'$ tout entier.
$Y^\circ = \{u \in l^1 \text{ tq } \phi(v)(u) = 0, \forall v \in l_0^\infty\} = \{0\}$. En effet, si $u \in Y^\circ$, alors $\phi(e_i)(u) = 0$ pour tout i (où e_i est la suite dont toutes les coordonnées valent 0 sauf la i-ème, qui vaut 1) dont $u_i = 0$ pour tout i.
On a donc $Y^{\circ\perp} = \{0\}^\perp = (l^1)' \neq \overline{\mathrm{Vect}\,(Y)} = Y$.
c) Soit E un espace de Banach non-réflexif.
Soit $\phi \in E'' - J_E(E)$. Prenons $Y = \mathrm{Ker}\,(\phi) = \{f \in E' \text{ tq } \phi(f) = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de E', distinct de E' car ϕ n'est pas nulle.
Supposons par l'absurde que $Y = \overline{\mathrm{Vect}\,(Y)} = Y^{\circ\perp}$. Alors, en posant $V = Y^\circ$, on a $Y = V^\perp$. L'ensemble V ne peut pas contenir deux éléments x, y linéairement indépendants.
En effet, sinon, d'après le théorème d'Hahn-Banach, il existe e_x et e_y deux formes linéaires continues telles que $e_x(x) = 1, e_x(y) = 0, e_y(x) = 0, e_y(1) = 1$. Pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(s, t) \neq (0, 0)$, $se_x + te_y \notin V^\perp$ car $(se_x + te_y)(x) = s \neq 0$ ou $(se_x + te_y)(y) = t \neq 0$. Pourtant, il existe s, t non tous deux nuls tels que $\phi(se_x + te_y) = 0$, c'est-à-dire tels que $se_x + te_y \in Y = V^\perp$. L'ensemble V est donc de dimension 1 : $V = \mathbb{R}x$ pour un certain $x \in E$. Donc $Y = \{f \in E' \text{ tq } f(x) = 0\} = \{f \in E' \text{ tq } J_E(x)(f) = 0\} = \mathrm{Ker}\,(J_E(x))$. Les formes linéaires $J_E(x)$ et ϕ ont donc le même noyau. Cela implique qu'elles sont colinéaires. Donc $\phi \in J_E(E)$. C'est absurde.
3. Notons $\overline{C}^F$ l'adhérence pour la topologie forte et $\overline{C}^f$ celle pour la topologie faible.
Puisque la topologie faible est moins fine que la topologie forte, un fermé pour la topologie faible est un fermé pour la topologie forte. Donc $\overline{C}^f$ est un fermé contenant C au sens de la topologie forte. Par définition de l'adhérence, on doit donc avoir $\overline{C}^F \subset \overline{C}^f$.
Montrons que l'inclusion est une égalité.
Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \overline{C}^f - \overline{C}^F$. Puisque $\overline{C}^F$ est fermé pour la topologie forte (c'est-à-dire celle induite par la norme de E), $d(x_0, \overline{C}^F) > 0$. D'après le théorème d'Hahn-Banach, il existe $\phi \in E'$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall z \in \overline{C}^F, \phi(z) \geq a > \phi(x_0)$$

L'ensemble $S = \{z \in E \text{ tq } \phi(z) \geq a\}$ est fermé pour la topologie faible (par définition de la topologie faible). Comme il contient C (puisqu'il contient $\overline{C}^F$), il contient l'adhérence faible de C, c'est-à-dire $\overline{C}^f$. Il doit donc contenir x_0. C'est absurde.

Exercice 2

1. a) La topologie faible est, par définition, la topologie la moins fine rendant continue toutes les formes linéaires continues sur E. Pour la topologie forte, ces applications sont toutes continues donc la topologie faible est moins fine que la topologie forte.

Une suite qui converge pour une certaine topologie converge aussi (vers la même limite) pour toutes les topologies moins fines.
b) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, e_n la suite dont toutes les composantes sont nulles sauf la n-ième qui vaut 1. Cette suite ne converge pas pour la topologie forte ($||e_{n+1} - e_n||_2 = \sqrt{2} \not\to 0$).
Montrons qu'elle converge vers 0 pour la topologie faible. Soit ϕ une forme linéaire continue. Comme $(l^2(\mathbb{N}))' \approx l^2(\mathbb{N})$, on sait qu'il existe $u \in l^2(\mathbb{N})$ telle que, pour toute $v \in l^2(\mathbb{N})$:

$$\phi(v) = \sum_n u_n v_n$$

Pour tout n, $\phi(e_n) = u_n$. Comme $\sum_n u_n^2 < +\infty$, $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ donc $\phi(e_n) \to 0 = \phi(0)$.
Pour toute forme linéaire continue ϕ, on a donc $\phi(e_n) \to \phi(0)$. Cela implique (par une propriété des topologies engendrées par des applications) que $e_n \to 0$ au sens de la topologie faible.
2. a) Pour tout k, si on note ϕ_k l'application linéaire continue telle que $\phi_k(v) = v_k$ pour toute $v \in l^1(\mathbb{N})$, on a $u_k^{(n)} = \phi_k(u^{(n)}) \to \phi(0) = 0$.
b) On va construire la suite par récurrence. Supposons les suites construites jusqu'à $k-1$ (avec $k \leq 0$, cela permet de faire l'initialisation en même temps que la récurrence) et construisons-les au rang k.
Posons $T = S_1 \cup ... \cup S_{k-1}$. Pour tout $t \in T$, $u_t^{(n)} \to 0$ quand $n \to +\infty$, d'après la question précédente. Pour n assez grand, on a donc, puisque T est fini :

$$\sum_{t \in T} |u_t^{(n)}| \leq \epsilon/2$$

On choisit n_k de sorte que $u^{(n_k)}$ satisfait cette condition et $n_k > n_1, ..., n_{k-1}$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{t \notin T} |u_t^{(n_k)}| &= ||u^{(n_k)}||_1 - \sum_{t \in T} |u_t^{(n_k)}| \\ &\geq ||u^{(n_k)}||_1 - \epsilon/2\end{aligned}$$

Il existe donc $S_k \subset \mathbb{N} - T$ finie telle que :

$$\sum_{t \in S_k} |u_t^{(n_k)}| \geq ||u^{(n_k)}||_1 - \epsilon$$

c) Fixons $\epsilon > 0$ et définissons les suites $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ comme à la question précédente.
Soit $v \in l^\infty(\mathbb{N})$ la suite définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}v_s &= 0 \text{ si } s \in \mathbb{N} - \bigcup_k S_k \\ &= \text{signe}(u_s^{(n_k)}) \text{ si } s \in S_k\end{aligned}$$

Soit $\phi : w \in l^1(\mathbb{N}) \to \sum_n v_n w_n$. C'est une forme linéaire continue.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\phi(u^{(n_k)}) &= \sum_{s \in S_k} |u_s^{(n_k)}| + \sum_{s \notin S_k} v_s u_s^{(n_k)} \\
&\geq \sum_{s \in S_k} |u_s^{(n_k)}| - \sum_{s \notin S_k} |u_s^{(n_k)}| \\
&= 2 \sum_{s \in S_k} |u_s^{(n_k)}| - \sum_{s \in \mathbb{N}} |u_s^{(n_k)}| \\
&= 2 \sum_{s \in S_k} |u_s^{(n_k)}| - ||u^{(n_k)}||_1 \\
&\geq ||u^{(n_k)}||_1 - 2\epsilon \geq \eta - 2\epsilon
\end{aligned}$$

C'est absurde car $\eta - 2\epsilon > 0$ et, pourtant, on devrait avoir $\phi(u^{(n_k)}) \to 0$, à cause de la convergence faible vers 0.

Exercice 3

1. $\sum\limits_{i \in I} ||Ae_i||^2 = \sum\limits_{i \in I} \left(\sum\limits_{j \in J} \langle Ae_i, f_j \rangle^2 \right) = \sum\limits_{i \in I, j \in J} \langle e_i, A^* f_j \rangle^2 = \sum\limits_{j \in J} ||A^* f_j||^2$

Si $(e_i), (e'_i)$ sont deux bases hilbertiennes et (f_j) une troisième base, quelconque, on a :

$$\sum_i ||Ae_i||^2 = \sum_j ||A^* f_i||^2 = \sum_i ||Ae'_i||^2$$

donc la quantité voulue est bien indépendante de la base.

2. L'inégalité triangulaire est vérifiée car $||.||_2$ la vérifie. L'application est homogène. Si on montre que $||.||_{\mathcal{HS}} \geq |||A|||$, on aura aussi qu'elle est séparante.

Soit (e_i) une base hilbertienne. Soit x quelconque. On a $x = \sum\limits_i \langle x, e_i \rangle e_i$.

On a $||A(x)|| \leq \sum\limits_i |\langle x, e_i \rangle|.||A(e_i)|| \leq \left(\sum\limits_i |\langle x, e_i \rangle|^2 \right)^{1/2} . \left(\sum\limits_i ||Ae_i||^2 \right)^{1/2} = ||x||.||A||_{\mathcal{HS}}$. Comme c'est vrai pour tout x, $|||A||| \leq ||A||_{\mathcal{HS}}$.

3. Si B est de Hilbert-Schmidt, $||A \circ B||_{\mathcal{HS}} \leq |||A|||.||B||_{\mathcal{HS}} < +\infty$ donc $A \circ B$ est de Hilbert-Schmidt.

D'après la première question, un opérateur est de Hilbert-Schimdt si et seulement si son adjoint l'est. Donc si A est de Hilbert-Schmidt, A^* aussi et $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$ aussi, d'après ce qu'on vient de voir. Donc $A \circ B$ est de Hilbert-Schmidt.

4. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne fixée. L'application bilinéaire $\langle A, B \rangle = \sum\limits_i \langle Ae_i, Be_i \rangle$ est un produit scalaire dont la norme associée est $||.||_{\mathcal{HS}}$. Donc $\mathcal{HS}(H)$ est préhilbertien. Montrons qu'il est complet.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour $||.||_{\mathcal{HS}}$, c'est aussi une suite de Cauchy pour $|||.|||$ d'après la question 2. Elle converge donc au sens de la norme opérateur, vers une limite A_∞. Montrons qu'elle converge vers A_∞ pour $||.||_{\mathcal{HS}}$.

Pour tout i, $A_n e_i \to A_\infty e_i$. De plus, pour tout n et tout N :

$$\begin{aligned}\sum_{i\leq N}||(A_n - A_\infty)e_i||^2 &= \lim_{m\to+\infty}\sum_{i\leq N}||(A_n - A_m)e_i||^2\\ &\leq \sup_{m\geq n}||A_n - A_m||^2_{\mathcal{HS}}\end{aligned}$$

Donc $\sum_i ||(A_n - A_\infty)e_i||^2 \leq ||A_n - A_m||^2_{\mathcal{HS}} < +\infty$. Cela implique que $A_\infty \in \mathcal{HS}(H)$ et $||A_n - A_\infty||_{\mathcal{HS}} \to 0$.

5. Soit A de rang fini. Alors $(\mathrm{Ker}\, A)^\perp$ est de dimension finie (de même dimension que l'image). Notons d la dimension. On peut choisir $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne telle que $e_1, ..., e_d$ forment une base de $(\mathrm{Ker}\, A)^\perp$ et $e_k \in \mathrm{Ker}\, A$ pour tout $k > d$.
Alors $||A||_{\mathcal{HS}} = \sum_i ||Ae_i||^2 = \sum_{i\leq d}||Ae_i||^2 < +\infty$.
Montrons maintenant la densité des opérateurs de rang fini. Soit $A \in \mathcal{HS}(H)$ et soit $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe B de rang fini tel que $||A - B||_{\mathcal{HS}} \leq \epsilon$.
Soit N tel que $\sum_{i>N}||Ae_i||^2 \leq \epsilon^2$.
Posons B l'opérateur qui est égal à A sur $\mathrm{Vect}\,\{e_1, ..., e_N\}$ et égal à 0 sur $\mathrm{Vect}\,\{e_1, ..., e_N\}^\perp$. L'opérateur B est de rang fini : son image est engendrée par $B(e_1), ..., B(e_N)$. De plus :

$$||A - B||_{\mathcal{HS}} = \sqrt{\sum_{i>N}||Ae_i||^2} \leq \epsilon$$

Puisque les opérateurs de rang fini sont denses, tout opérateur de Hilbert-Schmidt est limite (pour la norme $||.||_{\mathcal{HS}}$ mais donc aussi pour la norme $|||.|||$) d'opérateurs de rang fini. Or une limite d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.
En effet, supposons que les opérateurs de rang fini $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un opérateur A pour la norme $|||.|||$. Montrons que A est compact. Il suffit de montrer que $A(\overline{B}_H(0,1))$ est précompact.
Soit $\epsilon > 0$. Soit n suffisamment grand pour que $|||A - B_n||| \leq \epsilon/2$. Puisque B_n est de rang fini, $B_n(\overline{B}_E(0,1))$ est un compact (fermé borné d'un espace de dimension finie). Il existe donc $x_1, ..., x_s$ dans ce compact tels que :

$$B_n(\overline{B}_E(0,1)) \subset \bigcup_{t\leq s} B(x_t, \epsilon/2)$$

Pour tout $z \in \overline{B}_E(0,1)$, $||A(z) - B_n(z)|| \leq \epsilon/2$. Comme il existe t tel que $||B_n(z) - x_t|| \leq \epsilon/2$, il existe t tel que $||A(z) - x_t|| \leq \epsilon$.
Donc $A(\overline{B}_H(0,1)) \subset \bigcup_{t\leq s} B(x_t, \epsilon)$.

6. Pour presque tout $x \in X$, $K(x, .) \in L^2(X, \mu)$ donc, par l'inégalité de Hölder, $A_K(f)(x)$ est bien définie pour presque tout x. Nous allons voir dans la suite qu'il s'agit de plus d'une fonction de $L^2(X, \mu)$.
A_K est linéaire. De plus, pour tout x et toute f, $|A_K(f)(x)| \leq ||K(x, .)||_2||f||_2$, par l'inégalité de Hölder.

Donc, pour toute f, $||A_K(f)||_2 = \int_{x\in X} |A_K(f)(x)|^2 \leq \int_{x,y\in X} |K(x,y)|^2 ||f||_2^2 d\mu(x)d\mu(y) = ||K||_2^2 ||f||_2^2$.
L'opérateur A_K est donc continu, de norme inférieure ou égale à $||K||_2$.
Pour toute g :

$$\begin{aligned}\int_X A_K(f)(x)g(x)d\mu(x) &= \int_{x,y\in X} K(x,y)f(y)g(x)d\mu(x)d\mu(y) \\ &= \int_{y\in X} f(y)\left(\int_{x\in X} K(y,x)g(x)d\mu(x)\right)d\mu(y)\end{aligned}$$

On en déduit que l'adjoint de A_K est l'opérateur $g \to (x \to \int_X K(y,x)g(y)d\mu(y))$. Les deux opérateurs sont égaux si et seulement si K est symétrique.

7. Le calcul des intégrales montre que cette famille est orthonormée : $\langle e_{i,j}, e_{k,l}\rangle = \langle e_i, e_k\rangle\langle e_j, e_l\rangle$. Il faut montrer que c'est une base. Pour cela, il suffit de montrer que son orthogonal est réduit à $\{0\}$.
Soit $f \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ tel que $\langle f, e_{i,j}\rangle = 0$ pour tous i, j. On va montrer que $f = 0$.
Les fonctions $f(., y)$ et $f(x, .)$ sont dans L^2 pour presque tous x, y. Quitte à modifier f sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer qu'elles sont dans L^2 pour tous x, y.
Pour tout j, la fonction $f_j : x \to \int_X f(x,y)e_j(y)d\mu(y)$ est dans L^2. De plus, $\langle f_j, e_i\rangle = \langle f, e_{i,j}\rangle = 0$ pour tous i, j. Donc, pour tout j, $f_j = 0$ presque partout (car $(e_i)_i$ est une base). Donc, pour presque tout x, $\langle f(x, .), e_j, =\rangle f_j(x) = 0$ pour tout j. Puisque $(e_j)_j$ est une base, cela implique que $f(x, .) = 0$ presque partout pour presque tout x. Donc $f = 0$ presque partout.

8.

$$\begin{aligned}||A_K||^2_{\mathcal{HS}} &= \sum_i ||A_K(e_i)||^2 \\ &= \sum_{i,j} \langle A_K(e_i), e_j\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle K, e_{i,j}\rangle^2 \\ &= ||K||^2_{L^2}\end{aligned}$$

9. Soit A un opérateur de Hilbert-Schmidt.
Pour $(i, j) \in I^2$, notons $k_{i,j} := \langle Ae_i, e_j\rangle$. On a alors

$$\sum_{(i,j)\in I^2} |k_{i,j}|^2 = \sum_{(i,j)\in I^2} \langle Ae_i, e_j\rangle^2 = \sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2 = \|A\|^2_{\mathcal{HS}} < +\infty.$$

Puisque la famille $(e_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ est orthonormée dans $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$, ceci entraîne que la fonction

$$K = \sum_{(i,j)\in I^2} k_{i,j}e_{i,j}$$

est dans $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$.
Pour tous $i, j \in I^2$, $\langle A_K(e_i), e_j\rangle = k_{i,j} = \langle Ae_i, e_j\rangle$. Puisque $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de $L^2(X, \mu)$, cela implique que A_K et A sont égaux.

Exercice 4

1. a) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, e_n la suite dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la n-ème qui vaut 1. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder de $l^p(\mathbb{N})$.
En effet, si $x \in l^p(\mathbb{N})$, $\sum\limits_{n\leq N} x_n e_n \to x$ lorsque $N \to +\infty$, ce qui prouve l'existence de la suite $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
Cette suite est unique car, s'il y en a deux, $(\alpha_n(x))$ et $(\beta_n(x))$, on doit avoir :

$$\left\|\sum_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n - \sum_{n\leq N} \beta_n(x)e_n\right\|_p \to 0 \qquad \text{quand } N \to +\infty$$

Or :

$$\left\|\sum_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n - \sum_{n\leq N} \beta_n(x)e_n\right\|_p^p = \sum_{n\leq N} |\alpha_n(x) - \beta_n(x)|^p$$

On doit donc avoir $\alpha_n(x) = \beta_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Supposons que E admet une base de Schauder (e_n). Posons $A = \{q_1e_1+...+q_Ne_N \text{ tq } q_1, ..., q_N \in \mathbb{Q}, N \in \mathbb{N}\}$. C'est un ensemble dénombrable. Montrons que A est dense dans E.
Soit $x \in E$ quelconque. Soit $\epsilon > 0$. Il faut montrer que $A \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left\|x - \sum\limits_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n\right\| \leq \epsilon/2$. Soient $q_1, ..., q_N \in \mathbb{Q}$ tels que :

$$\left\|\sum_{n\leq N} q_n e_n - \sum_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n\right\| < \epsilon/2$$

Alors $\left\|x - \sum\limits_{n\leq N} q_n e_n\right\| < \epsilon$.
Donc A est dense et E est séparable.
L'ensemble $l^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable. Il n'admet donc pas de base de Schauder.
2. a) Pour tout x, $\sum\limits_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n \to x$. On doit donc avoir :

$$||x|| = \lim_{N\to+\infty} \left\|\sum_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n\right\| \leq \sup_{N\to+\infty} \left\|\sum_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n\right\| = M(x)$$

Avant de montrer que M est une norme, démontrons que les applications α_n sont linéaires. Soient $x, y \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Puisque $\sum\limits_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n \to x$ et $\sum\limits_{n\leq N} \alpha_n(y)e_n \to y$, on a aussi :

$$\sum_{n\leq N} (\lambda\alpha_n(x) + \mu\alpha_n(y))e_n \to \lambda x + \mu y$$

Puisque la suite $(\alpha_n(\lambda x+\mu y))_{n\in\mathbb{N}}$ est uniquement définie, on doit avoir $\alpha_n(\lambda x+\mu y) = \lambda\alpha_n(x)+\mu\alpha_n(y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque $\alpha_n(tx) = t\alpha_n(x)$, on a $M(tx) = |t|M(x)$ pour tous $x \in E, t \in \mathbb{R}$.
Puisque $M(x) \geq ||x||$, l'application M est séparante.
Enfin :

$$\begin{aligned} M(x+y) &= \sup_{N\in\mathbb{N}} \left|\left| \sum_{n\leq N} \alpha_n(x+y)e_n \right|\right| \\ &= \sup_{N\in\mathbb{N}} \left|\left| \sum_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n + \sum_{n\leq N} \alpha_n(y)e_n \right|\right| \\ &\leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \left(\left|\left| \sum_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n \right|\right| + \left|\left| \sum_{n\leq N} \alpha_n(y)e_n \right|\right| \right) \\ &\leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \left|\left| \sum_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n \right|\right| + \sup_{N\in\mathbb{N}} \left|\left| \sum_{n\leq N} \alpha_n(y)e_n \right|\right| = M(x) + M(y) \end{aligned}$$

Donc M est une norme
b) Supposons que $(x_s)_{s\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour M. Puisque $M \geq ||.||$, c'est aussi une suite de Cauchy pour $||.||$. Notons x_∞ sa limite au sens de la norme $||.||$ et montrons que c'est aussi la limite pour la norme M.
Pour tous $s, t, N \in \mathbb{N}$:

$$\left|\left| \sum_{n\leq N} \alpha_n(x_s)e_n - \sum_{n\leq N} \alpha_n(x_t)e_n \right|\right| \leq M(x_s - x_t)$$

Pour tout N, la suite $(\sum_{n\leq N} \alpha_n(x_s)e_n)_{s\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy. Elle converge alors dans E vers une limite qu'on note y_N. Cela implique que, pour tout N, $\alpha_N(x_s)e_N \to y_N - y_{N-1}$ lorsque $s \to +\infty$ et donc que $\alpha_N(x_s)$ converge vers une limite a_N.
Montrons que $\sum_{n\leq N} a_n e_n \to x_\infty$ lorsque $N \to +\infty$.

Soit $\epsilon > 0$. Montrons que, pour tout N assez grand $\left|\left| x_\infty - \sum_{n\leq N} a_n e_n \right|\right| \leq \epsilon$.
Pour tous $s, N \in \mathbb{N}$:

$$\left|\left| \sum_{n\leq N} \alpha_n(x_s)e_n - \sum_{n\leq N} a_n e_n \right|\right| = \lim_{t\to+\infty} \left|\left| \sum_{n\leq N} \alpha_n(x_s)e_n - \sum_{n\leq N} \alpha_n(x_t)e_n \right|\right| \leq \lim_{t\to+\infty} M(x_s - x_t)$$

Soit s tel que, pour tout $t \geq s$, $M(x_s - x_t) \leq \epsilon/3$. Un tel s existe car $(x_s)_{s\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. De plus, puisque $||x_s - x_\infty|| \to 0$, on peut supposer, quitte à choisir s plus grand, que $||x_s - x_\infty|| \leq \epsilon/3$.

Pour tout N assez grand, $\left|\left| x_s - \sum_{n\leq N} \alpha_n(x)e_n \right|\right| \leq \epsilon/3$. Pour tout N assez grand, on a donc :

$$\begin{aligned} \left|\left| x_\infty - \sum_{n\leq N} a_n e_n \right|\right| &\leq ||x_\infty - x_s|| + \left|\left| x_s - \sum_{n\leq N} \alpha_n(x_s)e_n \right|\right| + \left|\left| \sum_{n\leq N} \alpha_n(x_s)e_n - \sum_{n\leq N} a_n e_n \right|\right| \\ &\leq 2\epsilon/3 + \lim_{t\to+\infty} M(x_s - x_t) \leq \epsilon \end{aligned}$$

Donc $\sum_{n\leq N} a_n e_n \to x_\infty$ quand $N\to+\infty$. On a donc, pour tout n, $a_n = \alpha_n(x_\infty)$.
Pour tout N :

$$\left|\left|\sum_{n\leq N}\alpha_n(x_s)e_n - \sum_{n\leq N}\alpha_n(x_\infty)e_n\right|\right| = \lim_{t\to+\infty}\left|\left|\sum_{n\leq N}\alpha_n(x_s)e_n - \sum_{n\leq N}\alpha_n(x_t)e_n\right|\right| \leq \sup_{t\geq s} M(x_s-x_t)$$

Donc $M(x_s-x_\infty)\leq \sup_{t\geq s} M(x_s-x_t)\to 0$ quand $s\to+\infty$. La suite $(x_s)_{s\in\mathbb{N}}$ est donc convergente pour M.
c) L'application Id : $(E,M)\to(E,||.||)$ est une bijection linéaire entre deux espaces de Banach. Cette application est 1-lipschitzienne (donc continue) d'après la question a). Elle est donc de réciproque continue d'après le théorème de l'isomorphisme. Si K est la norme de la réciproque, on doit avoir, pour tout $x\in E$, $M(x)\leq K||x||$.

3. Commençons par supposer que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder. Puisque, pour tout x, il existe une suite d'éléments de Vect $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers x, la propriété (1) est vérifiée.
Soit K comme à la question 2.c). Pour tous $N<N'$ et tous réels $a_1,...,a_{N'}$, si on pose $x=\sum_{n\leq N'} a_n e_n$:

$$\left|\left|\sum_{n\leq N} a_n e_n\right|\right| = \left|\left|\sum_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n\right|\right| \leq M(x)\leq K||x|| = K\left|\left|\sum_{n\leq N'} a_n e_n\right|\right|$$

Donc (2) est vérifiée.

Supposons maintenant (1) et (2) et montrons que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Schauder.
Soit $x\in E$ quelconque. D'après la propriété (1), il existe, pour tout $N\in\mathbb{N}$, un $(N+1)$-uplet de réels, $(a_0^N,...,a_N^N)$, tel que :

$$\sum_{n\leq N} a_n^N e_n \to x \qquad \text{quand } N\to+\infty$$

Notons, pour tout $N\in\mathbb{N}$, $y_N=\sum_{n\leq N} a_n^N e_n$. La suite $(y_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge donc vers x.

Pour tout $L\in\mathbb{N}$, la suite $\left(\sum_{n\leq L} a_n^N e_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. En effet, par (2), pour tous $N,N'\geq L$:

$$\left|\left|\sum_{n\leq L} a_n^N e_n - \sum_{n\leq L} a_n^{N'} e_n\right|\right| \leq K||y_N-y_{N'}||$$

On en déduit (comme à la question 2.b)) que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(a_n^N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge, vers une limite qu'on note a_n^∞.
Montrons que $\sum_{n\leq N} a_n^\infty e_n\to x$ quand $N\to+\infty$.
Pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\left|\left|\sum_{n\leq N} a_n^\infty e_n - \sum_{n\leq N} a_n^N e_n\right|\right| = \lim_{L\to+\infty}\left|\left|\sum_{n\leq N} a_n^L e_n - \sum_{n\leq N} a_n^N e_n\right|\right| \leq K\lim_{L\to+\infty}||y_L-y_N|| \to 0 \text{ quand } N\to+\infty$$

Puisque $\sum_{n\leq N} a_n^N e_n\to x$ lorsque $N\to+\infty$, $\sum_{n\leq N} a_n^\infty e_n$ tend également vers x.

On a donc montré l'existence d'une suite $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n \to x$ lorsque $N \to +\infty$. Montrons son unicité.
Soient $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n(x))$ deux suites telles que :

$$\sum_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n \to x \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\leq N}\beta_n(x)e_n \to x \qquad\qquad \text{quand } N \to +\infty$$

Pour tout N, d'après la propriété (2) :

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{n\leq N}(\alpha_n(x)-\beta_n(x))e_n\right|\right| &\leq K\inf_{N'>N}\left|\left|\sum_{n\leq N'}(\alpha_n(x)-\beta_n(x))e_n\right|\right|\\ &\leq K\lim_{N'\to+\infty}\left|\left|\sum_{n\leq N'}\alpha_n(x)e_n - \sum_{n\leq N'}\beta_n(x)e_n\right|\right| = 0\end{aligned}$$

Pour tout N, on a donc $\sum\limits_{n\leq N}(\alpha_n(x)-\beta_n(x))e_n = 0$. Par récurrence, puisque les e_n sont tous non-nuls, cela implique que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n(x)=\beta_n(x)$.
4. a) On a vu à la question 2.a) que les α_n étaient linéaires.
Pour tous $N\in\mathbb{N}, x\in E$, $\left|\left|\sum\limits_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n\right|\right| \leq M(x) \leq K||x||$ pour une certaine constante K, d'après la question 2. L'application $x \to \sum\limits_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n$ est donc continue.
Cela implique que, pour tout n, l'application $x\to\alpha_n(x)e_n$ est continue, donc α_n aussi.
b) Supposons que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder de E'. Soit $f\in E'$ quelconque.
Puisque $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder, il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_{n\leq N}a_n\alpha_n \to f$ lorsque $N\to+\infty$.
Soit $x\in E_L$, pour un certain L. Alors $f(x) = \lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n\leq N}a_n\alpha_n(x) = \lim\limits_{N\to+\infty}\left(\sum\limits_{L\leq n\leq N}a_n\alpha_n\right)(x) \leq \limsup\limits_{N}\left|\left|\sum\limits_{L\leq n\leq N}a_n\alpha_n\right|\right|.||x||$, c'est-à-dire que $||f_{|E_L}|| \leq \limsup\limits_{N}\left|\left|\sum\limits_{L\leq n\leq N}a_n\alpha_n\right|\right|$.
Or $\left|\left|\sum\limits_{L\leq n\leq N}a_n\alpha_n\right|\right| = \left|\left|\sum\limits_{n\leq N}a_n\alpha_n - \sum\limits_{0\leq n\leq L}a_n\alpha_n\right|\right| \to 0$ quand $N,L\to+\infty$, puisque $\left(\sum\limits_{n\leq N}a_n\alpha_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$, étant convergente, est une suite de Cauchy.
Donc $||f_{|E_L}||\to 0$.
c) Soit $f\in E'$. Posons $a_n = f(e_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Montrons que $\sum\limits_{n\leq N}a_n\alpha_n \to f$ lorsque $N\to+\infty$.
Soit K comme dans la question 2.c). Montrons que, pour tout $x\in E$ et tout $N\in\mathbb{N}$, $\left|\left|\left(f-\sum\limits_{n\leq N}a_n\alpha_n\right)(x)\right|\right| \leq (1+K)||f_{|E_N}||.||x||$. Cela impliquera que $\left|\left|f-\sum\limits_{n\leq N}a_n\alpha_n\right|\right| \leq (1+K)||f_{|E_N}||\to 0$ lorsque $N\to+\infty$.
Soient $x\in E, N\in\mathbb{N}$ quelconques. On a $x = \lim\limits_{L\to+\infty}\sum\limits_{n\leq L}\alpha_n(x)$. On a donc :

$$f(x) = \lim_{L\to+\infty} f\left(\sum_{n\leq L}\alpha_n(x)e_n\right) = \lim_{L\to+\infty}\left(\sum_{n\leq L}a_n\alpha_n(x)\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\left\|\left(f - \sum_{n\leq N} a_n\alpha_n\right)(x)\right\| &= \lim_{L\to+\infty}\left\|\sum_{N<n\leq L} a_n\alpha_n(x)\right\| \\
&= \lim_{L\to+\infty}\left\|f\left(\sum_{N<n\leq L}\alpha_n(x)e_n\right)\right\| \\
&\leq \lim_{L\to+\infty}||f_{|E_N}||.\left\|\sum_{N<n\leq L}\alpha_n(x)e_n\right\| \\
&= ||f_{|E_N}||\left\|x - \sum_{n\leq N}\alpha_n(x)e_n\right\| \\
&\leq ||f_{|E_N}||.||x||\,(1+K)
\end{aligned}$$

L'unicité de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_{n\leq N} a_n\alpha_n \to f$ lorsque $N\to+\infty$ est une conséquence du fait que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, dès que $N\geq k$, $a_k = \left(\sum\limits_{n\leq N} a_n\alpha_n\right)(e_k)$. Puisque cette dernière expression tend vers $f(e_k)$ lorsque $N\to+\infty$, on a nécessairement $a_k = f(e_k)$.