Feuille d'exercices n^{o}1

Exercice 1 : inverse de la transformée de Fourier
On veut démontrer le résultat suivant : si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour presque tout t :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

1. Soit $g \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\int_{\mathbb{R}} g(u)du = 1$. Pour tout $\epsilon > 0$, on pose $g_\epsilon(u) = \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{u}{\epsilon}\right)$.
a) Soit h une fonction continue et à support compact. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose :

$$H(y) = \int_{\mathbb{R}} |h(t-y) - h(t)| dt$$

Montrer que H est une fonction continue et bornée.
b) Montrer que $g_\epsilon \star h$ converge vers h dans L^1 lorsque $\epsilon \to 0$.
c) Montrer que, pour toute fonction $\tilde{h} \in L^1(\mathbb{R})$, $||g_\epsilon \star \tilde{h}||_1 \leq ||g||_1 ||\tilde{h}||_1$.
d) Montrer que, pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{R})$, $g_\epsilon \star h$ converge vers h dans L^1.
[Indication : On pourra admettre qu'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues et à support compact qui converge vers h dans $L^1(\mathbb{R})$.]
2. Montrer que, pour tout t, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \lim\limits_{M\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} e^{-(\omega/M)^2} d\omega$.

3. Démontrer le résultat.
On pourra admettre les deux résultats suivants :
– La transformée de Fourier de la fonction $t \to e^{-t^2}$ est la fonction $\omega \to \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$.
– Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui converge dans L^1 vers une limite f_∞, alors on peut en extraire une suite $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_{\phi(n)}(t) \overset{n\to\infty}{\to} f_\infty(t)$ pour presque tout t.

Exercice 2 : l'espace de Schwartz et la formule de Poisson
1. On note $\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ tq } \forall a, b \in \mathbb{N}, |x^a f^{(b)}(x)| \to 0 \text{ quand } |x| \to +\infty\}$.
On appelle cet ensemble l'*espace de Schwartz* et on peut vérifier qu'il s'agit d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, stable par dérivation et multiplication par toute fonction polynomiale.
Montrer que, pour toute $f \in \mathcal{S}$, $\hat{f}$ est bien définie et appartient à $\mathcal{S}$.
2. Soit $f \in \mathcal{S}$ quelconque.
a) Montrer que la fonction suivante est bien définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 1-périodique :

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)$$

b) Montrer la formule de Poisson :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n)$$

Exercice 3 : extension à L^2 de la transformée de Fourier

1. Soient $f, g \in \mathcal{S}$ (où $\mathcal{S}$ est l'espace de Schwartz défini à l'exercice précédent).
Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega$$

[Indication : Définir $\tilde{g}(x) = \overline{g(-x)}$, considérer $f \star \tilde{g}$ et lui appliquer la formule d'inversion de l'exercice 1.]

2. a) Montrer qu'il existe une unique fonction continue $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ pour toute fonction $f \in \mathcal{S} \cap L^2(\mathbb{R})$.
b) Que vaut $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}$?

3. Vérifier que, pour toute $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$, on a bien :

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

On pourra admettre que, pour toute $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que $f_n \to f$ dans L^1 et $f_n \to f$ dans L^2.

Exercice 4 : distributions tempérées

On note $\mathcal{S}$ l'espace de Schwartz défini dans l'exercice 2.
Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$ et toute $f \in \mathcal{S}$, on pose :

$$N_{a,b}(f) = ||x^a \partial^b f(x)||_\infty$$

On munit $\mathcal{S}$ de la topologie engendrée par les applications $\{N_{a,b}(. - f_0)\}_{a,b\in\mathbb{N}, f_0\in\mathcal{S}}$.
On appelle *distribution tempérée* une application linéaire continue $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$.

1. Montrer qu'une application linéaire $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ est une distribution tempérée si et seulement si il existe $a_0, b_0 \in \mathbb{N}, C > 0$ tels que :

$$\forall f \in \mathcal{S}, \quad |T(f)| \leq C \sup_{a\leq a_0, b\leq b_0} N_{a,b}(f)$$

2. a) Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ quelconque.
Montrer que l'application $H_g : f \in \mathcal{S} \to \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$ est une distribution tempérée.
b) Montrer que le dirac $\delta_0 : f \to f(0)$ est une distribution tempérée.

3. [Dérivée d'une distribution]
Si $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ est une distribution tempérée, on définit :

$$\partial T : f \in \mathcal{S} \to -T(f')$$

a) Montrer que ∂T est une distribution tempérée.
b) Montrer que si $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\partial H_g = H_{g'}$.
c) Calculer ∂H_g pour $g(t) = 1_{t\geq 0}$.

4. [Transformée de Fourier d'une distribution]

Si $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ est une distribution tempérée, on définit :

$$\mathcal{F}T : f \in \mathcal{S} \to T(\mathcal{F}(f))$$

a) Montrer que $\mathcal{F}T$ est une distribution tempérée.
b) Calculer $\mathcal{F}H_g$ si $g \in L^\infty \cap L^2(\mathbb{R})$.
c) Calculer $\mathcal{F}\delta_0$.

Exercice 5 : le prolongement holomorphe de la fonction ζ par la formule de Poisson
On dit qu'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est holomorphe si elle est développable en série entière au voisinage de chaque point de son ensemble de définition.
On admet qu'un produit ou un quotient de deux fonctions holomorphes est holomorphe sur son ensemble de définition.
1. Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on pose :

$$\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s}$$

Vérifier que $\zeta(s)$ est bien définie si $\mathrm{Re}(s) > 1$.
On va montrer qu'elle se prolonge sur $\mathbb{C} - \{1, 0, -2, -4, ...\}$ en une fonction holomorphe.
2. Pour tout $t > 0$, on pose $f_t(x) = e^{-tx^2}$. Calculer $\hat{f}_t$.
3. Pour tout $t > 0$, on pose $\phi(t) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2}$. Montrer que la fonction ϕ vérifie :

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{1}{t}\right)$$

[Indication : Utiliser la question précédente et la formule de Poisson.]
Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 0$, on pose $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$.
On admet que cette définition est valide, que la fonction Γ admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0, -1, -2, ...\}$ et qu'elle ne s'annule pas.
4. Montrer que, pour tout s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a $\zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2} = \int_0^{+\infty} \left(\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-\pi t n^2}\right) t^{s/2-1} dt$.
5. En déduire que :

$$\begin{aligned}
2\zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2} &= \int_0^{+\infty} (\phi(t) - 1) t^{s/2-1} dt \\
&= \int_1^{+\infty} (\phi(t) - 1) t^{s/2-1} dt + \int_1^{+\infty} (\sqrt{t}\phi(t) - 1) t^{-s/2-1} dt \\
&= 2\left[\int_1^{+\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-\pi t n^2}\right) (t^{s/2-1} + t^{-s/2-1/2}) dt - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right]
\end{aligned}$$

6. Montrer que ζ admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C} - \{1, 0, -2, -4, ...\}$ et que, si on pose $\xi(s) = \zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}$, alors on a :

$$\xi(s) = \xi(1 - s)$$