Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$1

Corrigé

Exercice 1

1. a) Soit $K > 0$ tel que $h(t) = 0$ si $|t| > K$.
Soit $]a; b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle borné quelconque. Montrons que H est continue sur I.
L'application $F : (t, y) \to |h(t-y) - h(t)|dt$ est continue sur $\mathbb{R}\times]a; b[$ (car h est continue). De plus, pour tout $(t, y) \in \mathbb{R}\times]a; b[$:

$$|F(t, y)| \leq 2||h||_\infty 1_{|t|\leq|a|+|b|+K}(t)$$

En effet, si $|t| > |a|+|b|+K$, alors $|t| > K$ et $|t-y| \geq |t|-|y| \geq |a|+|b|+K-\max(|a|, |b|) \geq K$ donc $h(t-y) = h(t) = 0$.
La fonction $t \to 2||h||_\infty 1_{|t|\leq|a|+|b|+K}(t)$ est intégrable et ne dépend pas de y. D'après le théorème de convergence dominée, $H(y) = \int_\mathbb{R} F(t, y)dt$ est donc continue sur $]a; b[$.
La fonction H est bornée car, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$H(y) \leq \int_\mathbb{R} (|h(t-y)| + |h(t)|)\, dt = 2||h||_1 < +\infty$$

b)

$$\begin{aligned}
||g_\epsilon \star h - h||_1 &= \int_\mathbb{R} |g_\epsilon \star h(t) - h(t)|dt \\
&= \int_\mathbb{R} \left|\left(\int_\mathbb{R} \frac{1}{\epsilon} g(u/\epsilon)h(t-u)du\right) - h(t)\right| dt \\
&= \int_\mathbb{R} \left|\left(\int_\mathbb{R} g(u)h(t-\epsilon u)du\right) - h(t)\right| dt \\
&= \int_\mathbb{R} \left|\int_\mathbb{R} g(u)(h(t-\epsilon u) - h(t))du\right| dt \\
&\leq \int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} |g(u)|.|h(t-\epsilon u) - h(t)|dudt \\
&= \int_\mathbb{R} |g(u)|H(\epsilon u)du
\end{aligned}$$

La fonction $(\epsilon, u) \to |g(u)|H(\epsilon u)$ est uniformément majorée par $||H||_\infty.|g|$, qui est intégrable. Puisque $H(0) = 0$, la fonction $u \to |g(u)|H(\epsilon u)$ converge simplement vers 0 lorsque $\epsilon \to 0$. Par le théorème de convergence dominée, cela implique que $||g_\epsilon \star h - h||_1 \to 0$.

c)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |g_\epsilon \star \tilde{h}(t)|dt &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} g(u/\epsilon)\tilde{h}(t-u)du \right| dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon} |g(u/\epsilon)||\tilde{h}(t-u)|dudt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon} |g(u/\epsilon)| \left(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{h}(t-u)|dt \right) du \\
&= ||\tilde{h}||_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon} |g(u/\epsilon)|du \\
&= ||\tilde{h}||_1 ||g||_1
\end{aligned}$$

d) Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues et à support compact qui converge vers h dans $L^1(\mathbb{R})$.

Pour tout n et tout $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
||g_\epsilon \star h - h||_1 &\leq ||g_\epsilon \star h - g_\epsilon \star h_n||_1 + ||g_\epsilon \star h_n - h_n||_1 + ||h_n - h||_1 \\
&= ||g_\epsilon \star (h - h_n)||_1 + ||g_\epsilon \star h_n - h_n||_1 + ||h_n - h||_1 \\
&\leq (1 + ||g||_1)||h - h_n||_1 + ||g_\epsilon \star h_n - h_n||_1
\end{aligned}$$

Puisque $||g_\epsilon \star h_n - h_n||_1 \to 0$ quand $\epsilon \to 0$ (à n fixé), on obtient :

$$\limsup_{\epsilon\to 0} ||g_\epsilon \star h - h||_1 \leq (1 + ||g||_1)||h - h_n||_1$$

La quantité $(1 - ||g||_1)||h - h_n||_1$ pouvant être choisie arbitrairement petite (car elle tend vers 0 quand n tend vers l'infini), cela implique :

$$||g_\epsilon \star h - h||_1 \to 0 \qquad \text{quand } \epsilon \to 0$$

2. Pour tous $\omega \in \mathbb{R}, M > 0$:

$$\left| \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} e^{-(\omega/M)^2} \right| \leq |\hat{f}(\omega)|$$

Puisqu'on a supposé que la fonction $\hat{f}$ appartenait à L^1, la fonction $\omega \to |\hat{f}(\omega)|$ est intégrable.
Pour tout ω, $\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}e^{-(\omega/M)^2} \to \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}$ lorsque $M \to +\infty$.
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}e^{-(\omega/M)^2}d\omega \to \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad \text{quand } M \to +\infty$$

3. Soit $M > 0$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}e^{-(\omega/M)^2}d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-i\omega u}e^{i\omega t}e^{-(\omega/M)^2}dud\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-(\omega/M)^2} e^{-i\omega(u-t)}d\omega \right) f(u)du \\
&= \frac{M}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\omega^2} e^{-iM\omega(u-t)}d\omega \right) f(u)du \\
&= \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-M^2(t-u)^2/4} f(u)du \\
&= f \star g_{1/M}(t)
\end{aligned}$$

si on pose $g(x) = \frac{e^{-x^2/4}}{2\sqrt{\pi}}$ et qu'on reprend les notations de la première question.
La fonction g est bien dans $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et est d'intégrale 1.
D'après 1.d), $f \star g_{1/M}$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$ lorsque $M \to +\infty$. D'autre part, d'après la question 2., $f \star g_{1/M}$ converge simplement vers $t \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$.
Il faut déduire de cela que $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ pour presque tout t.
D'après le deuxième résultat admis, il existe une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $M_n \to +\infty$ et telle que $f \star g_{1/M_n}$ converge simplement vers f (en plus de converger vers f dans L^1). Alors $f \star g_{1/M_n}$ converge simplement à la fois vers f (presque partout) et vers $t \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ donc les deux limites sont égales presque partout.

Exercice 2

1. Pour toute $f \in \mathcal{S}$, $f(x) = o(x^2)$ en $\pm\infty$ donc $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f}$ est bien définie.
Soit $f \in \mathcal{S}$ fixée. Montrons que $\hat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$. On a :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

La fonction $(\omega, x) \to f(x)e^{-i\omega x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sa dérivée n-ième par rapport à ω vaut :

$$(-ix)^n f(x) e^{-i\omega x}$$

Puisque $x \to x^n f(x)$ appartient à la classe de Schwartz, la fonction $x \to (-ix)^n f(x) e^{-i\omega x}$ est dans L^1 et sa valeur absolue est inférieure à :

$$|x|^n |f(x)|$$

qui est une fonction de L^1 indépendante de ω. D'après le théorème de convergence dominée, la fonction $\hat{f}$ est donc n fois dérivable (pour tout n) et sa dérivée n-ième est la transformée de Fourier de $x \to (-ix)^n f(x)$, qui est une fonction de la classe de Schwartz.
Montrons maintenant que, si f est dans la classe de Schwartz, alors $|x^a \hat{f}(x)| \to 0$ quand $x \to +\infty$ pour tout $a \in \mathbb{N}$. On peut vérifier par récurrence que :

$$x^{a+1} \hat{f}(x) = (-i)^{a+1} \widehat{f^{(a+1)}(x)}$$

Puisque $f^{(a+1)} \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $x^{a+1}\hat{f}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. La fonction $x^a \hat{f}(x)$ tend donc vers 0 en $\pm\infty$.
Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, on a vu que $\hat{f}^{(b)}$ était la transformée de Fourier d'une fonction de la classe de Schwartz. D'après le résultat qu'on vient de démontrer, on a donc $x^a \hat{f}^{(b)}(x) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$.
Puisque c'est valable pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, $\hat{f}$ appartient à $\mathcal{S}$.

2. a) Soit $M > 0$ quelconque. Montrons que g est bien définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-M; M[$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\sup\limits_{x \in]-M;M[} |f(x+k)| \leq \sup\limits_{|y| \geq |k|-M} |f(y)|$. Puisque $|f(x)| \to 0$ lorsque $x \to +\infty$ (car $f \in \mathcal{S}$), $\sup\limits_{x \in]-M;M[} |f(x+k)| \to 0$ lorsque $|k| \to +\infty$.

La série définissant g est donc normalement convergente sur $]-M;M[$. De même, la série de ses dérivées n-ièmes est normalement convergente sur $]-M;M[$. La fonction g est donc bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
La fonction g est 1-périodique car :

$$g(x+1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+(k+1)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) = g(x)$$

b) Pour tout n, notons $c_n(g)$ le n-ième coefficient de la série de Fourier de g et calculons-le :

$$\begin{aligned}
c_n(g) &= \int_0^1 g(x)e^{-2\pi inx}dx \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)\right) e^{-2\pi inx}dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+k)e^{-2\pi inx}dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(x)e^{-2\pi inx}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi inx}dx = \hat{f}(2\pi n)
\end{aligned}$$

(On a pu échanger somme et intégrale car on a vu à la question précédente que la somme convergeait normalement sur tout intervalle borné.)
Puisque g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 1-périodique :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{inx}$$

(et la somme converge uniformément sur tout compact)
Pour $x=0$, on obtient :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = g(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n)$$

Exercice 3
1. Posons, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\tilde{g}(x) = \overline{g(-x)}$.
La fonction $f\star\tilde{g}$ appartient à L^1 : comme on l'a vu à la question 1.c) de l'exercice 1, $||f\star\tilde{g}||_1 \leq ||f||_1||\tilde{g}||_1 = ||f||_1||g||_1$.
La transformée de $f\star\tilde{g}$ vaut $\hat{f}\hat{\tilde{g}}$. La transformée de Fourier de $\tilde{g}$ vaut $\hat{\tilde{g}}(\omega) = \overline{\hat{g}(\omega)}$.
On a vu à l'exercice précédent que $\hat{f}$ et $\hat{g}$ appartenaient à $\mathcal{S}$. Ce sont donc des fonctions de classe L^2. Le produit $\hat{f}\hat{\tilde{g}}$ appartient donc à L^1 (d'après l'inégalité de Hölder).
Puisque $f\star\tilde{g}$ ainsi que sa transformée de Fourier sont des fonctions de L^1, on peut appliquer la formule d'inversion de l'exercice 1 au point 0 :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt = f\star\tilde{g}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f\star\tilde{g}}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega$$

(La formule de l'exercice 1 n'est valable que pour presque tout t. Néanmoins, ici, comme les fonctions $f \star \tilde{g}$ et $t \to \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f \star \tilde{g}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ sont continues, l'égalité est valable pour tout t. Elle est donc en particulier valable en 0.)

2. a) L'ensemble $\mathcal{S}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ (car l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}$ contient cet ensemble). De plus, comme on vient de le voir, la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}$ est linéaire et continue pour la norme $||.||_2$: si on applique la question précédente pour $g = f$, on trouve que $||f||_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||\hat{f}||_2$ si $f \in \mathcal{S}$. Elle est donc uniformément continue sur $\mathcal{S}$.

Une application uniformément continue sur un sous-ensemble dense d'un espace métrique (ici $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R})$) à valeurs dans un espace complet (ici $L^2(\mathbb{R})$) se prolonge de manière unique en une application continue définie sur tout l'ensemble de départ.

b) Pour toute $f \in \mathcal{S}$, d'après l'exercice 1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} f(-x) \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{F}$ est continue sur L^2 et puisqu'on a vu que $\mathcal{S}$ était dense dans $L^2(\mathbb{R})$, cette égalité est valable pour toute $f \in L^2$: $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = f(-.)/(2\pi)$.

3. Soit $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ qui converge vers f dans L^1 et dans L^2.

Alors $\mathcal{F}(f_n) \to \mathcal{F}(f)$ dans L^2, puisque $\mathcal{F}$ est continue.

De plus, $\mathcal{F}(f_n)$ converge uniformément vers $\hat{f}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \mathbb{R}$:

$$|\mathcal{F}(f_n)(\omega) - \hat{f}(\omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f_n(x) - f(x)) e^{-i\omega x} dx \right| \leq ||f_n - f||_1$$

Si une suite de fonctions converge dans $L^2(\mathbb{R})$ et converge uniformément, alors les deux limites (la limite au sens L^2 et la limite pour la norme uniforme) sont égales presque partout. Ici, cela donne :

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f)$$

Exercice 4

1.

Lemme. *Une application linéaire* $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ *est continue si et seulement si* $T^{-1}(\{|z| \leq 1\})$ *est un voisinage de* 0.

Démonstration. Si T est continue, alors l'antécédant d'un voisinage d'un point est un voisinage de l'antécédant du point donc $T^{-1}(\{|z| \leq 1\})$ est un voisinage de 0.

Réciproquement, supposons que $T^{-1}(\{|z| \leq 1\})$ est un voisinage de 0. Soit $f_0 \in \mathcal{S}$ quelconque. Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Il faut montrer que $T^{-1}(\{|z - T(f_0)| \leq \epsilon\})$ est un voisinage de f_0.

$T^{-1}(\{|z - T(f_0)| \leq \epsilon\}) = \{g \in \mathcal{S} \text{ tq } (g - f_0)/\epsilon \in T^{-1}(\{|z| \leq 1\})\}$

L'application $g \to \frac{g-f_0}{\epsilon}$ est continue. En effet, sa composition par $N_{a,b}(.-f_1)$ est continue pour tous choix de a, b, f_1. Une propriété des topologies engendrées par une famille d'applications implique donc la continuité de $g \to \frac{g-f_0}{\epsilon}$.
Si $T^{-1}(\{|z| \leq 1\})$ est un voisinage de 0, son antécédant par $g \to \frac{g-f_0}{\epsilon}$ est un voisinage de f_0 donc $T^{-1}(\{|z - T(f_0)| \leq \epsilon\})$ est un voisinage de f_0. $\square$

Une application linéaire $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ est donc une distribution tempérée si et seulement si $T^{-1}(\{|z| \leq 1\})$ est un voisinage de 0, c'est-à-dire si et seulement si il existe un ouvert élémentaire contenant 0 et inclus dans $T^{-1}(\{|z| \leq 1\})$.
On peut vérifier que tout ouvert élémentaire contenant 0 contient un ensemble de la forme $\{f \in \mathcal{S} \text{ tq } N_{a,b}(f) \leq D, \forall a \leq a_0, \forall b \leq b_0\}$, pour certains $a_0, b_0 \in \mathbb{N}, D > 0$. De plus, tous les ensembles de cette forme sont des voisinages de 0. Un ensemble des donc un voisinage de 0 si et seulement si il contient un ensemble de la forme $\{f \in \mathcal{S} \text{ tq } N_{a,b}(f) \leq D, \forall a \leq a_0, \forall b \leq b_0\}$.
L'application linéaire T est donc une distribution si et seulement si il existe a_0, b_0, D tels que :

$$\begin{aligned}
&\{f \in \mathcal{S} \text{ tq } N_{a,b}(f) \leq D, \forall a \leq a_0, b \leq b_0\} \subset T^{-1}(\{|z| \leq 1\}) \\
&\Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{S} - \{0\}, \left| T\left(\frac{D.f}{\sup\limits_{a \leq a_0, b \leq b_0} N_{a,b}(f)} \right) \right| \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{S}, |T(f)| \leq \frac{1}{D} \sup_{a \leq a_0, b \leq b_0} N_{a,b}(f)
\end{aligned}$$

2. a) Pour toute $f \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
|H_g(f)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)||g(x)|dx \\
&\leq ||g||_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \\
&= ||g||_\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)| + x^2|f(x)|}{1+x^2} dx \\
&\leq ||g||_\infty (N_{0,0}(f) + N_{2,0}(f)) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&\leq 2\pi ||g||_\infty \sup_{a \leq 2, b \leq 0} N_{a,b}(f)
\end{aligned}$$

b) Pour toute $f \in \mathcal{S}$, $|\delta_0(f)| \leq N_{0,0}(f)$.
3. a) L'application ∂T étant linéaire, il faut montrer qu'elle vérifie la propriété de la question 1.
Soient C, a_0, b_0 tels que :

$$\forall f \in \mathcal{S}, \quad |T(f)| \leq C \sup_{a \leq a_0, b \leq b_0} N_{a,b}(f)$$

Alors, puisque, pour tous a, b, $N_{a,b}(f') = N_{a,b+1}(f)$, on a :

$$\forall f \in \mathcal{S}, \quad |\partial T(f)| \leq C \sup_{a \leq a_0, b \leq b_0} N_{a,b}(f') \leq C \sup_{a \leq a_0, b \leq b_0 + 1} N_{a,b}(f)$$

b) Pour toute $f \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
\partial H_g(f) = -H_g(f') = -\int_{\mathbb{R}} f'(x)g(x)dx \\
&= -[f(x)g(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)dx = H_{g'}(f)
\end{aligned}$$

c) Pour toute $f \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
\partial H_g(f) = -H_g(f') &= -\int_{\mathbb{R}} f'(x)g(x)dx \\
&= -\int_0^{+\infty} f'(x)dx \\
&= f(0) = \delta_0(f)
\end{aligned}$$

Donc $\partial H_g = \delta_0$.
4. a) Soient a_0, b_0, C tels que :

$$\forall f \in \mathcal{S}, \quad |T(f)| \leq C \sup_{a \leq a_0, b \leq b_0} N_{a,b}(f)$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$ et toute $f \in \mathcal{S}$, $x^a \partial^b \hat{f}(x)$ est la transformée de Fourier de $(-i)^{a+b}\partial^a(x^b f(x)) = (-i)^{a+b} \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} \partial^{a-k}(x^b)\partial^k f(x)$.
Puisque, pour toute $g \in L^1(\mathbb{R})$, $||\hat{g}||_\infty \leq ||g||_1$, on a :

$$\begin{aligned}
N_{a,b}(\hat{f}) = ||x^a \partial^b \hat{f}(x)||_\infty &\leq \left|\left|\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} \partial^{a-k}(x^b)\partial^k f(x)\right|\right|_1 \\
&\leq \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} \left|\left|\partial^{a-k}(x^b)\partial^k f(x)\right|\right|_1 \\
&\leq \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (b!) \left|\left|x^{\max(b-a+k,0)}\partial^k f(x)\right|\right|_1 \\
&\leq \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (b!) \sup_{b' \leq b, a' \leq a} ||x^{b'}\partial^{a'} f(x)||_1 \\
&= 2^a (b!) \sup_{b' \leq b, a' \leq a} ||x^{b'}\partial^{a'} f(x)||_1 \\
&\leq 2^{a+1}\pi (b!) \sup_{b' \leq b, a' \leq a+2} N_{a',b'}(f)
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$:

$$||f||_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+x^2)|f(x)|}{1+x^2} dx \leq 2\pi \max(N_{0,0}(f), N_{2,0}(f))$$

et donc que, pour tous a', b', $||x^{b'}\partial^{a'} f(x)||_1 \leq 2\pi \max(N_{a',b'}(f), N_{a'+2,b'}(f))$.

On en déduit que, pour toute $f \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}T(f)| &= |T(\hat{f})| \\ &\leq C \sup_{a \leq a_0, b \leq b_0} N_{a,b}(\hat{f}) \\ &\leq C\pi 2^{a_0+1}(b_0!) \sup_{a \leq a_0+2, b \leq b_0} N_{a,b}(f)\end{aligned}$$

Donc, d'après la question 1, $\mathcal{F}T$ est une distribution.
b) Pour toute $f \in \mathcal{S}$, en utilisant la formule de la question 1. de l'exercice 3 (qui s'étend à tout L^2 par continuité) :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}H_g(f) &= H_g(\mathcal{F}(f)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\hat{f}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\overline{\overline{\hat{f}}}(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x)\overline{\hat{\overline{\hat{f}}}(x)}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x)\overline{\overline{\hat{\hat{f}}(-x)}}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x)f(x)dx \\ &= H_{\hat{g}}(f)\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}H_g = H_{\hat{g}}$.
c) Pour toute $f \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\delta_0(f) &= \delta_0(\hat{f}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \\ &= H_1(f)\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}\delta_0 = H_1$.

Exercice 5

1. Si $\mathrm{Re}(s) > 1$, comme $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \left|\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}\right|$, la série converge absolument en tout point.
2. On utilise le fait que, pour $G(x) = e^{-x^2}$, on a $\hat{G}(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$.
On a $\hat{f}_t(\omega) = \widehat{G(\sqrt{t}.)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{t}}\hat{G}(\omega/\sqrt{t}) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\omega^2/(4t)}$.
3. La fonction ϕ est bien définie car la série converge uniformément en pour tout $t > 0$.
$\phi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{\pi t}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_{\pi t}(2\pi n) = t^{-1/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t} = \frac{1}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{1}{t}\right)$
4. Remarquons d'abord que le terme de droite de l'égalité est bien défini.
Pour tout t, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-\pi t n^2} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-\pi n t} = \frac{e^{-\pi t}}{1-e^{-\pi t}} \sim e^{-\pi t}$. La fonction est donc bien intégrable en $+\infty$.

Montrons qu'elle est aussi intégrable en 0. Puisque $\phi(t) = 1 + 2 \sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-\pi t n^2}$, $\phi(t) \to 1$ lorsque $n \to +\infty$. D'après la question précédente, $\phi(t) = t^{-1/2}\phi\left(\frac{1}{t}\right) \sim t^{-1/2}$ lorsque $t \to 0$. On a donc, pour $t \to 0$:

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-\pi t n^2}\right) t^{s/2-1} = \frac{\phi(t)-1}{2} t^{s/2-1} \sim \frac{1}{2} t^{(s-3)/2}$$

Comme $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\mathrm{Re}((s-3)/2) > -1$ donc ceci est intégrable en 0.
On échange la somme et l'intégrale (le théorème de convergence dominée nous le permet) puis on effectue les changements de variable $u = \pi n^2 t$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-\pi t n^2}\right) t^{s/2-1} dt &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t n^2} t^{s/2-1} dt \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{-s} \pi^{-s/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-u} u^{s/2-1} du \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{-s} \Gamma(s/2) \pi^{-s/2} = \zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
2\zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2} &= 2\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-\pi t n^2}\right) t^{s/2-1} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} e^{-\pi t n^2}\right) t^{s/2-1} dt \\
&= \int_0^{+\infty} (\phi(t)-1) t^{s/2-1} dt \\
&= \int_1^{+\infty} (\phi(t)-1) t^{s/2-1} dt + \int_0^1 (\phi(t)-1) t^{s/2-1} dt \\
&= \int_1^{+\infty} (\phi(t)-1) t^{s/2-1} dt + \int_1^{+\infty} (\phi(1/u)-1) u^{-s/2-1} du \\
&= \int_1^{+\infty} (\phi(t)-1) t^{s/2-1} dt + \int_1^{+\infty} (\sqrt{t}\phi(t)-1) t^{-s/2-1} dt \\
&= \int_1^{+\infty} (\phi(t)-1)(t^{s/2-1} + t^{-s/2-1}\sqrt{t}) dt + \int_1^{+\infty} (t^{-s/2-1}\sqrt{t} - t^{-s/2-1}) dt \\
&= \int_1^{+\infty} (\phi(t)-1)(t^{s/2-1} + t^{-s/2-1/2}) dt + \int_1^{+\infty} (t^{-s/2-1/2} - t^{-s/2-1}) dt \\
&= \int_1^{+\infty} (\phi(t)-1)(t^{s/2-1} + t^{-s/2-1/2}) dt + \frac{1}{s/2-1/2} - \frac{1}{s/2} \\
&= 2\left[\int_1^{+\infty} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-\pi t n^2}\right)(t^{s/2-1} + t^{-s/2-1/2}) dt - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}\right]
\end{aligned}$$

6. Montrons que $s \to \int_1^{+\infty} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-\pi t n^2}\right)(t^{s/2-1} + t^{-s/2-1/2}) dt - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0, 1\}$.

Il suffit de montrer que $s \to \int_1^{+\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-\pi t n^2} \right) (t^{s/2-1} + t^{-s/2-1/2}) dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. On va en fait montrer que $s \to \int_1^{+\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-\pi t n^2} \right) t^s dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$; l'affirmation précédente s'en déduira (puisque la composition d'une fonction holomorphe et d'une application affine est holomorphe, de même que la somme de deux fonctions holomorphes).
Pour tous $s, s_0 \in \mathbb{C}$, pour tout $t > 0$:

$$t^s = t^{s_0} e^{(s-s_0)\log(t)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\log^n(t) t^{s_0}}{n!} (s - s_0)^n$$

Posons $\psi(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-\pi t n^2}$, pour tout $t > 0$.
Pour tout $t > 1$, $\psi(t) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-\pi t n} = \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} < \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi}} < 2e^{-\pi t}$.
On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \psi(t) \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{\log^n(t) t^{s_0}}{n!} (s - s_0)^n \right| dt &= \int_1^{+\infty} \psi(t) \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\log^n(t) t^{\mathrm{Re}(s_0)}}{n!} |s - s_0|^n \right) dt \\
&= \int_1^{+\infty} \psi(t) t^{\mathrm{Re}(s_0)} t^{|s-s_0|} dt \\
&\leq \int_1^{+\infty} 2e^{-\pi t} t^{\mathrm{Re}(s_0)} t^{|s-s_0|} dt < +\infty
\end{aligned}$$

La fonction $t \to \psi(t) \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{\log^n(t) t^{s_0}}{n!} (s - s_0)^n \right|$ est donc dans L^1. Ceci permet d'appliquer le théorème de convergence dominée et d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-\pi t n^2} \right) t^s dt &= \int_1^{+\infty} \psi(t) t^s dt \\
&= \int_1^{+\infty} \psi(t) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\log^n(t) t^{s_0}}{n!} (s - s_0)^n \right) dt \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} (s - s_0)^n \int_1^{+\infty} \psi(t) \frac{\log^n(t) t^{s_0}}{n!} dt \\
&= \sum_n \alpha_n (s - s_0)^n
\end{aligned}$$

(si on pose $\alpha_n = \int_1^{+\infty} \psi(t) \frac{\log^n(t) t^{s_0}}{n!} dt$.)
La fonction $s \to \int_1^{+\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-\pi t n^2} \right) t^s dt$ est donc développable en série entière au voisinage de s_0.
C'est vrai pour tout s_0 donc elle est holomorphe.
On a donc montré que la fonction $s \to \zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}$ était égale sur $\{z \text{ tq } \mathrm{Re} z > 1\}$ à une fonction qui, elle, est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0, 1\}$. On note ξ cette fonction.
Puisque Γ est holomorphe et ne s'annule pas sur $\mathbb{C} - \{0, -1, -2, ...\}$ et puisque $s \to \pi^{-s/2}$ est aussi holomorphe, on peut prolonger ζ par :

$$\zeta(s) = \frac{\xi(z)}{\Gamma(s/2)} \pi^{s/2}$$

C'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} - \{1, 0, -2, -4, ...\}$ et elle coïncide avec la définition précédente de ζ sur $\{z \text{ tq } \mathrm{Re}(z) > 0\}$.
L'expression avec une intégrale trouvée à la question précédente ne change pas lorsqu'on remplace s par $1 - s$. On a donc :

$$\xi(s) = \xi(1 - s)$$