Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$2

Exercice 1 : transmission d'un signal stéréo
On modélise un signal stéréo par une paire de fonctions $\{G(t), D(t)\}$ à valeurs réelles et à bande limitée dans $\{|\omega| \leq F\}$.
On suppose fixé ω_0, un réel qu'on ne connaît pas exactement mais dont on sait qu'il est dans l'intervalle $]2F; 3F[$. On transmet le signal suivant :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$$

où $f_1(t) = \cos(\omega_0 t)$, $f_2(t) = G(t) + D(t)$ et $f_3(t) = \cos(2\omega_0 t)(G(t) - D(t))$.
1. Montrer que les trois composantes f_1, f_2 et f_3 ont des supports disjoints en fréquence.
2. On pose $s(t) = \cos(2\omega_0 t) f_3(t)$. Montrer que les transformées de Fourier de G, D et s vérifient la relation

$$\frac{1}{2}\left(\hat{G}(\omega) - \hat{D}(\omega)\right) = \hat{h}(\omega) \cdot \hat{s}(\omega),$$

où h est un filtre passe-bas que l'on précisera.
3. Proposer un schéma de reconstruction des signaux $G(t)$ et $D(t)$ à partir du signal $f(t)$, qui n'utilise que des opérateurs de filtrage, d'addition, de soustraction, de multiplication et l'opérateur $(x \to x^2)$.
4. On suppose maintenant que p est une fonction dont la transformée de Fourier est à support dans $\{2F \leq |\omega| \leq 3F\}$. On transmet :

$$f(t) = p(t) + 2\left(p^2(t)G(t) + (1 - p^2(t))D(t)\right)$$

Montrer qu'il est toujours possible de reconstruire G et D.
[On autorise la division dans l'algorithme de reconstruction, à condition qu'on puisse raisonnablement espérer que ce par quoi on divise ne s'annule pas, lorsque p est « proche » d'un cosinus.]

Exercice 2 : stabilité et causalité des filtres rationnels
On considère un filtre dont la fonction de transfert $\hat{h}(\omega)$ vaut :

$$\hat{h}(\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)}$$

où P, Q sont des polynômes à coefficients réels, dont on note p, q les degrés.
1. a) Montrer que pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(\omega) \to 0$ quand $\omega \to \pm\infty$.
b) Montrer que si h est un filtre stable (c'est-à-dire $h \in L^1(\mathbb{R})$), alors $p < q$.

2. Montrer qu'on peut écrire $\hat{h}$ sous la forme :

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{d=1}^{D_n}\frac{\alpha_{n,d}}{(\lambda_n - i\omega)^d}$$

avec $\mathrm{Re}(\lambda_n) \neq 0$ pour tout n.

3. a) On suppose que $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer la transformée de Fourier de :

$$h_{p,\lambda}(t) = t^p e^{\lambda t} 1_{t\geq 0}$$

b) On suppose que $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer la transformée de Fourier de :

$$h_{p,\lambda}(t) = t^p e^{\lambda t} 1_{t\leq 0}$$

c) Donner une expression explicite de h.

4. À quelle condition sur les pôles de P/Q le filtre h est-il causal et stable ?

5. Soient P, Q deux polynômes à coefficients réels tels que $d^\circ P < d^\circ Q$ et que Q n'a pas de racine imaginaire pure. Soit h le filtre dont la fonction de transfert est $\hat{h}(\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)}$.
On appelle $\omega \to |\hat{h}(\omega)|^2$ la puissance spectrale de h.
Montrer qu'il existe un filtre $\tilde{h}$ tel que :
- $\tilde{h}$ est stable et causal.
- sa transformée de Fourier est de la forme $\frac{\tilde{P}(i\omega)}{\tilde{Q}(i\omega)}$, avec $\tilde{P}, \tilde{Q}$ des polynômes à coefficients réels.
- $\tilde{h}$ et h ont la même puissance spectrale.

Exercice 3 : modulation de fréquence pour un signal sinusoïdal

1. Soient $f_c, f_m > 0$ deux fréquences. Soit $\beta > 0$ un réel. On pose :

$$F(t) = \cos\left(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)\right)$$

Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\alpha_k| < +\infty$ et :

$$F(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k \cos(2\pi(f_c + kf_m)t)$$

Donner l'expression des α_k en fonction de β et des fonctions de Bessel :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(nu - x\sin(u))}du \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

2. Plus généralement, si f est un signal tel que $\hat{f}$ est à support dans $[-A; A]$, la *modulation de fréquence* consiste à transmettre le signal :

$$F(t) = \cos\left(2\pi f_c t + \beta\int_0^t f(u)du\right)$$

pour une certaine fréquence f_c fixée.

À l'aide de la question 1., montrer que, pour espérer reconstruire f à partir de F, il faut transmettre les fréquences de F comprises dans une bande de largeur au moins proportionnelle à A.

Exercice 4 : fenêtrage
On souhaite estimer la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ à partir de ses valeurs sur un intervalle fini $[-a;a]$.

1. Calculer $\widehat{f 1_{[-a;a]}}$ en fonction de $\hat{f}$.

2. Qu'obtient-on dans le cas $f = \cos(\omega_0 t)$?

3. Plus généralement, on approxime $\hat{f}$ par $\widehat{fW_a}$, pour une fonction W_a bien choisie, à support dans $[-a;a]$.
La fonction de Hann est la suivante :

$$W_a(t) = \begin{cases} (1+\cos(\pi t/a))/2 & \text{si } |t| < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Celle de Hamming est :

$$W_a(t) = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)\cos(\pi t/a) & \text{si } |t| < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où α est un élément de $]0;1[$, que Hamming conseille de prendre à peu près égal à $0,54$.
Justifier ces choix. Donner des exemples de fonctions f pour lesquelles $\hat{f}$ ne sera pas bien estimée.

Exercice 5 : inégalité de Young
Soient $p, q, r \in [1;+\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}), g \in L^q(\mathbb{R})$. On veut démontrer que $f \star g \in L^r$ et :

$$||f \star g||_r \leq ||f||_p ||g||_q$$

1. Démontrer le résultat dans le cas où $r = +\infty$.

2. Avant de passer au cas $r < +\infty$, on montre le résultat suivant : pour toute fonction mesurable $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et pour tout $l \geq 1$, l'inégalité suivante est vraie lorsque son terme de droite est défini :

$$\left(\int \left|\int \phi(x,y)dy\right|^l dx\right)^{1/l} \leq \int \left(\int |\phi(x,y)|^l dx\right)^{1/l} dy$$

On suppose que le terme de droite est bien défini. Pour $l = 1$, le résultat est vrai. On suppose donc $l > 1$.
a) Soit l' tel que $\frac{1}{l'} + \frac{1}{l} = 1$. Montrer que, pour toute fonction $\psi \in L^{l'}(\mathbb{R})$:

$$\int\int |\psi(x)\phi(x,y)| dx dy \leq ||\psi||_{l'} \int \left(\int |\phi(x,y)|^l dx\right)^{1/l} dy$$

b) En déduire que $\gamma : x \to \int \phi(x,y)dy$ est bien définie pour presque tout x.

c) Montrer que, pour toute fonction $\psi \in L^{l'}(\mathbb{R})$:

$$\left|\int \psi(x)\gamma(x)dx\right| \leq ||\psi||_{l'} \int \left(\int |\phi(x,y)|^l dx\right)^{1/l} dy$$

d) Conclure.

3. On suppose maintenant que $r < +\infty$.
a) On note $s = 1 - \frac{p}{r}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|h(x)| \leq ||f||_p^s \left(\int |f(x-y)|^{(1-s)q} |g(y)|^q dy\right)^{1/q}$$

b) On pose $t = \frac{r}{q}$. Montrer que $||h^q||_t \leq ||f||_p^{sq} ||g||_q^q ||f||_{(1-s)qt}^{(1-s)q}$.
c) Conclure.