

Feuille d'exercices n°2

Corrigé

Exercice 1

1. La transformée de Fourier de f_1 est $\pi(\delta_{-\omega_0} + \delta_{\omega_0})$. (Remarque : au sens des distributions, cette égalité est vraie et rigoureuse. Voir à ce sujet l'exercice 4 du TD de la semaine dernière.) Elle est à support dans $[-3F; -2F] \cup [2F; 3F]$.

La transformée de Fourier de f_2 est $\hat{G} + \hat{D}$. Elle est à support dans $[-F; F]$.

La transformée de Fourier de f_3 est :

$$\begin{aligned} \hat{f}_3(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f_3(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (e^{2i\omega_0 t} + e^{-2i\omega_0 t}) (G(t) - D(t)) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} ((\hat{G} - \hat{D})(\omega - 2\omega_0) + (\hat{G} - \hat{D})(\omega + 2\omega_0)) \end{aligned}$$

La fonction $(\hat{G} - \hat{D})(\omega - 2\omega_0)$ est à support dans $[-F + 2\omega_0; F + 2\omega_0] \subset [3F; 7F]$ et la fonction $(\hat{G} - \hat{D})(\omega + 2\omega_0)$ est à support dans $[-F - 2\omega_0; F - 2\omega_0] \subset [-7F; -3F]$. Le support de \hat{f}_3 est donc inclus dans $[-7F; -3F] \cup [3F; 7F]$.

Les trois supports sont bien disjoints.

2. De même que précédemment, $\hat{s}(t) = \frac{1}{2} (\hat{f}_3(t - 2\omega_0) + \hat{f}_3(t + 2\omega_0))$. En utilisant l'expression trouvée à la question précédente, on obtient :

$$\hat{s}(\omega) = \frac{1}{4} (\hat{G} - \hat{D})(\omega - 4\omega_0) + \frac{1}{2} (\hat{G} - \hat{D})(\omega) + \frac{1}{4} (\hat{G} - \hat{D})(\omega + 4\omega_0)$$

La fonction $\frac{1}{4} (\hat{G} - \hat{D})(\omega + 4\omega_0)$ est à support inclus dans $[-13F; -7F]$ et $\frac{1}{4} (\hat{G} - \hat{D})(\omega - 4\omega_0)$ à support inclus dans $[7F; 13F]$. Puisque $\hat{G} - \hat{D}$ est à support dans $[-F; F]$, on a, pour tout ω :

$$\hat{s}(\omega) 1_{[-F; F]}(\omega) = \frac{1}{2} (\hat{G} - \hat{D})(\omega)$$

On pose $\hat{h}(\omega) = 1_{[-F; F]}(\omega)$.

3. On définit h comme dans la question précédente. On définit l_1 et l_2 les filtres passe-bandes correspondant aux transformées de Fourier suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{l}_1(\omega) &= 1_{[-3F; -2F]}(\omega) + 1_{[2F; 3F]}(\omega) \\ \hat{l}_2(\omega) &= 1_{[-7F; -3F]}(\omega) + 1_{[3F; 7F]}(\omega) \end{aligned}$$

- On calcule $G(t) + D(t) = h \star f$.
- On calcule $\cos(\omega_0 t) = l_1 \star f$.
- On calcule $\cos^2(\omega_0 t) = \frac{\cos(2\omega_0 t) + 1}{2}$.
- On calcule $f_3(t) = l_2 \star f$.
- On calcule $g(t) = \cos^2(\omega_0 t)f_3(t) = \frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t)f_3(t) + \frac{1}{2}f_3(t)$.
- On calcule $\frac{1}{4}(G - D) = h \star g$.
- On calcule $G = \frac{1}{2}(G + D) + 2 \cdot \frac{1}{4}(G - D)$ et $D = \frac{1}{2}(G + D) - 2 \cdot \frac{1}{4}(G - D)$.

4. Notons q la fonction dont la transformée de Fourier est $\hat{p}1_{\omega \geq 0}$. Puisque p est réelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \hat{p}(-x) = \overline{\hat{p}(x)}$$

On a donc $\hat{p}(x) = \hat{q}(x) + \overline{\hat{q}(-x)}$, c'est-à-dire $p = q + \bar{q}$.

Cela donne :

$$\begin{aligned} f &= q + \bar{q} + 2((q^2 + 2|q|^2 + \bar{q}^2)G + (1 - q^2 - 2|q|^2 - \bar{q}^2)D) \\ &= 2\bar{q}^2(G - D) + \bar{q} + (2|q|^2G + (1 - 2|q|^2)D) + q + 2q^2(G - D) \end{aligned}$$

Calculons les supports des transformées de Fourier des différentes fonctions apparaissant dans cette expression. On utilise le fait que, si g_1 et g_2 sont deux fonctions telles que \hat{g}_1 est à support dans $[A_1; B_1]$ et \hat{g}_2 est à support dans $[A_2; B_2]$, alors $\widehat{g_1 g_2} = \frac{1}{2\pi} \hat{g}_1 \star \hat{g}_2$ est à support dans $[A_1 + A_2; B_1 + B_2]$.

La transformée de Fourier de q^2 est à support dans $[4F; 6F]$. La transformée de Fourier de $q^2(G - D)$ est donc à support dans $[3F; 7F]$.

De même, la transformée de Fourier de $\bar{q}^2(G - D)$ est à support dans $[-7F; -3F]$.

La transformée de Fourier de $(2|q|^2G + (1 - 2|q|^2)D)$ est à support dans $[-2F; 2F]$.

On utilise pour l'algorithme de reconstruction les filtres h_1, h_2, l_1, l_2 suivants :

$$\begin{aligned} \hat{h}_1 &= 1_{[-2F; 2F]} & \hat{h}_2 &= 1_{[-3F; 3F]} \\ \hat{l}_1 &= 1_{[-3F; -2F] \cup [2F; 3F]} & \hat{l}_2 &= 1_{[-7F; -3F] \cup [3F; 7F]} \end{aligned}$$

Un algorithme de reconstruction est alors :

- On calcule $f \star h_1 = (2|q|^2G + (1 - 2|q|^2)D)$.
- On calcule $p = q + \bar{q} = l_1 \star f$.
- On calcule $p^2 = \bar{q}^2 + 2|q|^2 + q^2$ puis $\bar{q}^2 + q^2 = p^2 \star l_2$ et $2|q|^2 = p^2 \star h_1$.
- On calcule $2(q^2 + \bar{q}^2)(G - D) = l_2 \star f$.
- On calcule $g \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{q}^2 + q^2) \cdot 2(q^2 + \bar{q}^2)(G - D) = 2(\bar{q}^4 + 2|q|^4 + q^4)(G - D)$.
- On calcule $4|q|^4(G - D) = h_2 \star g$.
- On calcule $D = (2|q|^2G + (1 - 2|q|^2)D) - \frac{4|q|^4(G - D)}{2|q|^2}$.
- On calcule $G = D + \frac{4|q|^4(G - D)}{(2|q|^2)^2}$.

Dans le cas où $p(t) = \cos(\omega_0 t)$, on a $q(t) = \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}$ donc $|q(t)|^2 = \frac{1}{4}$ ne s'annule pas.

Exercice 2

1. a) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de la classe de Schwartz convergeant vers f dans L^1 . (Pour la définition et les propriétés basiques de la classe de Schwartz, voir le TD précédent.)

Pour tout n , \hat{f}_n appartient à la classe de Schwartz donc tend vers 0 en $\pm\infty$.

Puisque $\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1$, $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers \hat{f} . La convergence étant uniforme, on peut intervertir les limites :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \hat{f}(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{f}_n(\omega) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \hat{f}_n(\omega) \right) = 0$$

De même en $-\infty$.

b) D'après le a), si $h \in L^1$, alors $\hat{h}(\omega) \rightarrow 0$ quand $\omega \rightarrow +\infty$.

Notons c_P et c_Q les coefficients dominants de P et Q . Quand $\omega \rightarrow +\infty$:

$$|\hat{h}(\omega)| \sim \frac{|c_P|\omega^p}{|c_Q|\omega^q} = \frac{|c_P|}{|c_Q|}\omega^{p-q}$$

Ceci tend vers 0 si et seulement si $p < q$.

2. Quitte à diviser par le plus grand dénominateur commun, on peut supposer que P et Q n'ont pas de racine commune.

On peut écrire :

$$Q(X) = \prod_{n=1}^N (X - \lambda_n)^{D_n}$$

où les λ_n sont les racines (distinctes) de Q et les D_n leurs multiplicités.

On peut décomposer $\frac{P}{Q}$ en éléments simples : il existe des complexes $\alpha_{n,d}$ tels que :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{n=1}^N \sum_{d=1}^{D_n} \frac{\alpha_{n,d}}{(\lambda_n - X)^d}$$

Il n'y a pas de terme polynomial dans la décomposition en éléments simples car on a vu que le degré de P était strictement inférieur au degré de Q .

En évaluant pour $X = i\omega$, on a le résultat demandé.

Pour tout n , $\text{Re}(\lambda_n) \neq 0$, sinon Q a une racine imaginaire pure et \hat{h} a un pôle (puisqu'on a supposé que P et Q n'avait pas de racine commune, si $Q(i\omega_0) = 0$, \hat{h} diverge en ω_0). C'est impossible car \hat{h} est la transformée de Fourier d'une fonction de L^1 donc est continue sur \mathbb{R} .

3. a) Remarquons d'abord que, si $\text{Re}(\lambda) < 0$, $h_{p,\lambda}$ décroît exponentiellement quand $|t| \rightarrow \infty$ donc $h_{p,\lambda}$ est dans L^1 et sa transformée de Fourier est bien définie.

Commençons par le cas où $p = 0$.

$$\begin{aligned} \hat{h}_{0,\lambda}(\omega) &= \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} e^{-i\omega t} dt \\ &= \left[\frac{e^{(\lambda - i\omega)t}}{\lambda - i\omega} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda - i\omega} \end{aligned}$$

Traitons maintenant le cas $p \in \mathbb{N}$. On sait que $\widehat{t^p f(t)} = i^p \hat{f}^{(p)}$. On peut donc vérifier par récurrence que, pour tout p :

$$\hat{h}_{p,\lambda}(\omega) = \frac{(-1)^p}{(\lambda - i\omega)^{p+1}} (p!)$$

b) $h_{p,\lambda}(t) = (-1)^p h_{p,-\lambda}(-t)$ donc, d'après le calcul de la question précédente (et en utilisant le fait que, pour toute $g \in L^1$, $\widehat{g(-)} = \widehat{g}(-)$) :

$$\hat{h}_{p,\lambda}(\omega) = (-1)^p \frac{(-1)^p (p!)}{(-\lambda + i\omega)^{p+1}} = \frac{(-1)^{p+1}}{(\lambda - i\omega)^{p+1}} (p!)$$

c) $\hat{h}(\omega) = \sum_n \sum_d (-1)^{d-1} \epsilon_d \frac{\alpha_{n,d}}{(d-1)!} h_{d-1,\lambda_n}(\omega)$ (où ϵ_d vaut 1 si $\text{Re}(\lambda_n) < 0$ et -1 sinon) donc :

$$h(t) = \sum_n \sum_d \epsilon_d \frac{\alpha_{n,d}}{(d-1)!} h_{d-1,\lambda_n}(t)$$

4. Le filtre est causal si et seulement si $h(t) = 0$ lorsque $t < 0$.

D'après la question précédente :

$$\forall t < 0, \quad h(t) = \sum_{n \text{ tq } \text{Re}(\lambda_n) > 0} \sum_d \epsilon_d \frac{\alpha_{n,d}}{(d-1)!} t^{d-1} e^{\lambda_n t}$$

Pour que cette dernière fonction soit identiquement nulle, il faut et suffit que $\alpha_{n,d} = 0$ pour tout n tel que $\text{Re}(\lambda_n) > 0$.

C'est équivalent au fait que \hat{h} est une somme de $\frac{\alpha_{n,d}}{\lambda_n - i\omega}$ avec $\text{Re}(\lambda_n) < 0$ pour tout n . C'est donc équivalent au fait que tous les pôles de P/Q sont de partie réelle strictement négative.

Dans ce cas, h est une somme de fonctions de la forme $t^p e^{\lambda t} 1_{t \geq 0}$. Il s'agit donc d'une fonction de L^1 (c'est-à-dire stable).

La condition que les pôles de P/Q soient de partie réelle strictement négative est donc équivalente au fait que le filtre soit causal et stable.

5. Écrivons Q comme produit de polynômes de degré 1 : $Q(\omega) = c_Q \prod_n (\omega - \lambda_n)$.

Pour tout n et tout $\omega \in \mathbb{R}$, $|i\omega - \lambda_n|^2 = |\overline{i\omega - \lambda_n}|^2 = |i\omega + \bar{\lambda}_n|^2$.

Pour tout n , posons $\mu_n = \lambda_n$ si $\text{Re}(\lambda_n) < 0$ et $\mu_n = -\bar{\lambda}_n$ sinon. D'après la remarque qui précède, $|i\omega - \lambda_n|^2 = |i\omega - \mu_n|^2$ pour tout n . De plus, $\text{Re}(\mu_n) < 0$ pour tout n .

Posons $\tilde{Q} = c_Q \prod_n (\omega - \mu_n)$. Alors, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $|\tilde{Q}(i\omega)|^2 = |Q(i\omega)|^2$. Notons \tilde{h} la fonction telle que :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{h}(\omega) = \frac{P(i\omega)}{\tilde{Q}(i\omega)}$$

D'après ce qui précède, h et \tilde{h} ont la même fréquence spectrale. Puisque les μ_n sont de partie réelle strictement négative, \tilde{h} est stable et causal, d'après la question 4.

Le polynôme \tilde{Q} est toujours à coefficient réels. En effet, si Q est à coefficients réels, on peut écrire $Q(X) = \prod_n (X - \lambda_n^{(1)}) \prod_n (X - \lambda_n^{(2)}) (X - \overline{\lambda_n^{(2)}})$, où les $\lambda_n^{(1)}$ sont les racines réels de Q et les $\lambda_n^{(2)}, \overline{\lambda_n^{(2)}}$ sont celles qui ne sont pas réelles. On vérifie alors que :

$$\tilde{Q}(X) = \prod_n (X - \mu_n^{(1)}) \prod_n (X - \mu_n^{(2)}) (X - \overline{\mu_n^{(2)}})$$

Donc \tilde{Q} est aussi à coefficients réels.

Exercice 3

1. On a $F(t) = \cos(2\pi f_c t) \cos(\beta \sin(2\pi f_m t)) - \sin(2\pi f_c t) \sin(\beta \sin(2\pi f_m t))$.

Notons $f_1(t) = \cos(\beta \sin(2\pi f_m t))$ et $f_2(t) = \sin(\beta \sin(2\pi f_m t))$. Puisque ces fonctions sont $1/f_m$ -périodiques et de classe \mathcal{C}^∞ , elles peuvent s'écrire sous la forme :

$$f_1(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^{(1)} e^{2\pi i f_m l t} \quad f_2(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^{(2)} e^{2\pi i f_m l t}$$

et les séries convergent normalement : $\sum_l |a_l^{(1)}| < +\infty$ et $\sum_l |a_l^{(2)}| < +\infty$.

$$\begin{aligned} a_l^{(1)} &= f_m \int_0^{1/f_m} f_1(t) e^{-2\pi i f_m l t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(t/(2\pi f_m)) e^{-ilt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (e^{-i(lt - \beta \sin(t))} + e^{-i(lt + \beta \sin(t))}) dt \\ &= \frac{1}{2} (J_l(\beta) + J_l(-\beta)) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} a_l^{(2)} &= f_m \int_0^{1/f_m} f_2(t) e^{-2\pi i f_m l t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2i} (e^{-i(lt - \beta \sin(t))} - e^{-i(lt + \beta \sin(t))}) dt \\ &= \frac{1}{2i} (J_l(\beta) - J_l(-\beta)) \end{aligned}$$

Remarquons en faisant le changement de variable $u \leftrightarrow -u$ que :

$$J_n(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(nu + x \sin(u))} du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i((-n)u - x \sin(u))} du = J_{-n}(x)$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} f_1(t) &= J_0(\beta) + \sum_{l \in \mathbb{N}^*} (J_l(\beta) + J_{-l}(\beta)) \cos(2\pi f_m l t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} J_l(\beta) \cos(2\pi f_m l t) \\ f_2(t) &= \sum_{l \in \mathbb{N}^*} (J_l(\beta) - J_{-l}(\beta)) \sin(2\pi f_m l t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} J_l(\beta) \sin(2\pi f_m l t) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} J_l(\beta) (\cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_m l t) - \sin(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_m l t)) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} J_l(\beta) \cos(2\pi (f_c + l f_m) t) \end{aligned}$$

2. On veut notamment pouvoir reconstruire f lorsque $f(t) = \cos(2\pi f_m t)$, avec $f_m \in \left[-\frac{A}{2\pi}; \frac{A}{2\pi}\right]$.

Dans ce cas, le signal transmis est le $F(t) = \cos(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t))$ de la question 1. D'après la question 1., cette fonction F a un spectre à raies, avec des pics aux fréquences $\pm 2\pi(f_c + kf_m)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Le coefficient des pics de fréquences $2\pi f_c$ et $-2\pi f_c$ ne dépend pas de f . Si on veut identifier f (c'est-à-dire, ici, f_m), il faut donc que la bande de fréquences transmises de F contienne au moins l'un des $2\pi(f_c + kf_m)$ pour $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Ceci étant vrai pour tout $f_m \in [-\frac{A}{2\pi}; \frac{A}{2\pi}]$, la bande de fréquences transmise doit être de largeur au moins $A/2$.

Exercice 4

1. $\widehat{f1_{[-a;a]}} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} \star \hat{1}_{[-a;a]}$

Comme $\hat{1}_{[-a;a]}(\omega) = \int_{-a}^a e^{-i\omega x} dx = 2 \frac{\sin(\omega a)}{\omega}$, cela donne :

$$\widehat{f1_{[-a;a]}} = \hat{f} \star \left(\omega \rightarrow \frac{\sin(a\omega)}{\pi\omega} \right)$$

2. Informellement, puisque $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$ et puisque la transformée de Fourier de la fonction $x \rightarrow e^{i\alpha x}$ est le dirac $2\pi\delta_\alpha$, on a :

$$\begin{aligned} \widehat{f1_{[-a;a]}}(\nu) &= (\pi\delta_{\omega_0} + \pi\delta_{-\omega_0}) \star \left(\omega \rightarrow \frac{\sin(a\omega)}{\pi\omega} \right) (\nu) \\ &= \frac{\sin(a(\omega - \omega_0))}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin(a(\omega + \omega_0))}{\omega + \omega_0} \end{aligned}$$

Pour a assez grand, la transformée de Fourier a bien deux « pics », comme celle de f , mais les valeurs en-dehors des pics ne tendent pas vers 0 quand $a \rightarrow +\infty$. L'approximation de \hat{f} fournie par $\widehat{f1_{[-a;a]}}$ n'est donc pas satisfaisante.

3. Calculons les transformées de Fourier de ces fonctions.

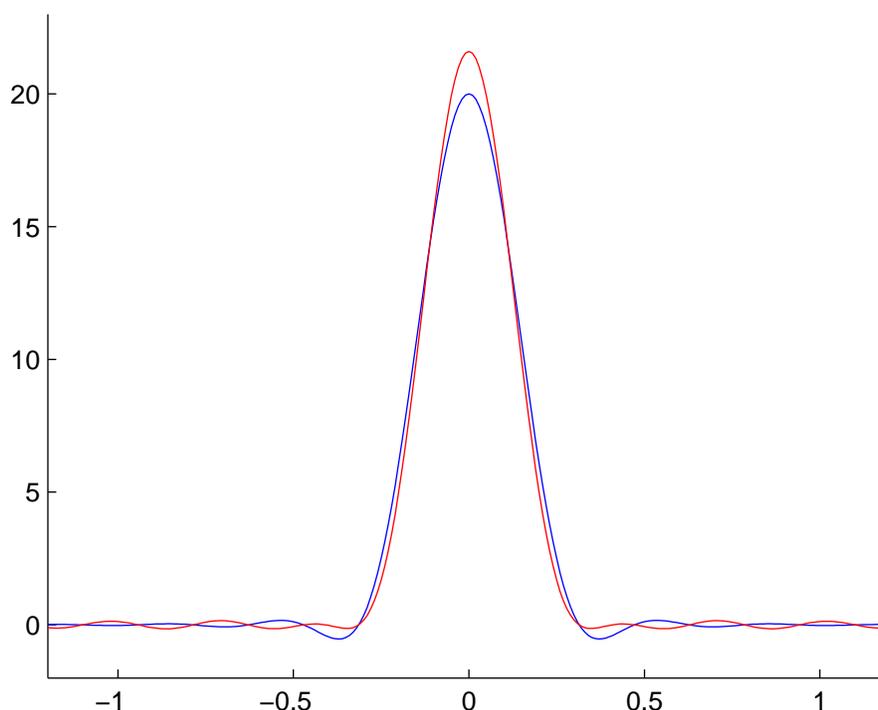
Pour la fonction de Hann :

$$\begin{aligned} \hat{W}_a(\omega) &= \int_{-a}^a W_a(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left(e^{-i\omega t} + \frac{e^{i(\pi/a - \omega)t} + e^{i(-\pi/a - \omega)t}}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2 \sin(\omega a)}{\omega} + \frac{\sin(\pi - \omega a)}{\pi/a - \omega} + \frac{\sin(\pi + \omega a)}{\pi/a + \omega} \right) \\ &= \frac{\sin(\omega a)}{2} \left(\frac{2}{\omega} + \frac{1}{\pi/a - \omega} - \frac{1}{\pi/a + \omega} \right) \\ &= \frac{(\pi/a)^2 \sin(\omega a)}{\omega(\pi/a - \omega)(\pi/a + \omega)} \end{aligned}$$

Pour la fonction de Hamming :

$$\begin{aligned}\hat{W}_a(\omega) &= \int_{-a}^a W_a(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{2\alpha \sin(\omega a)}{\omega} + (1 - \alpha) \left(\frac{\sin(\pi - \omega a)}{\pi/a - \omega} + \frac{\sin(\pi + \omega a)}{\pi/a + \omega} \right) \\ &= \sin(\omega a) \frac{2\alpha(\pi/a)^2 + 2(1 - 2\alpha)\omega^2}{\omega(\pi/a - \omega)(\pi/a + \omega)}\end{aligned}$$

La figure suivante montre la transformée de Fourier de la fonction de Hann (en bleu) et de celle de Hamming (en rouge), pour $a = 20$ et $\alpha = 0.54$.



La transformée de Fourier de la fonction de Hann décroît en $\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{1}{\omega^3}$ (la raison pour laquelle elle décroît plus vite que la fenêtre des questions 1. et 2. est qu'elle est beaucoup plus régulière : elle est \mathcal{C}^1 alors que la précédente n'était même pas continue). On n'a donc pas avec elle le problème qu'on avait dans la question 2 : si on s'en sert pour évaluer la transformée de Fourier d'une fonction dont la transformée de Fourier est composée de diracs (ou, plus généralement, de pics) assez espacés, la transformée de Fourier approximée sera bien composée de pics, avec des valeurs entre les pics qui tendront rapidement vers 0 en $+\infty$.

La fonction de Hamming n'a pas cette qualité : elle décroît en $\frac{1}{\omega}$. En revanche, le fait de prendre $\alpha \neq 1/2$ permet de diminuer l'amplitude de la première bosse de \hat{W}_a après la bosse principale. Elle est donc plus adaptée au cas des fonctions dont la transformée de Fourier contient des pics assez proches en fréquences : dans ces cas, elle permet d'obtenir une approximation correcte pour une valeur de a plus petite que celle qu'on devrait prendre avec une fenêtre de Hann.

Exercice 5

1. Dans ce cas, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Pour tout x :

$$\begin{aligned} |f \star g(x)| &= \left| \int f(y)g(x-y)dy \right| \\ &\leq \int |f(y)g(x-y)|dy \\ &\leq \|f\|_p \|g(x-\cdot)\|_q \\ &= \|f\|_p \|g\|_q \end{aligned}$$

2. a) Par Hölder :

$$\begin{aligned} \int \int |\psi(x)\phi(x,y)|dxdy &\leq \int \left(\int |\psi(x)|^{l'} dx \right)^{1/l'} \left(\int |\phi(x,y)|^l dx \right)^{1/l} dy \\ &= \|\psi\|_{l'} \int \left(\int |\phi(x,y)|^l dx \right)^{1/l} dy \end{aligned}$$

b) Si on prend $\psi = 1_{[-A;A]}$, on obtient que $\int_{-A}^A (\int |\phi(x,y)|^l dy) dx < +\infty$. On a donc $\int |\phi(x,y)|^l dy < +\infty$ pour presque tout $x \in [-A;A]$. Puisque c'est vrai pour tout A , c'est vrai pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Par inégalité triangulaire puis par la question a) :

$$\begin{aligned} \left| \int \psi(x)\gamma(x)dx \right| &\leq \int \int |\psi(x)||\phi(x,y)|dxdy \\ &\leq \|\psi\|_{l'} \int \left(\int |\phi(x,y)|^l dx \right)^{1/l} dy \end{aligned}$$

d) Puisque l'inégalité précédente est valable pour toute $\psi \in L^{l'}(\mathbb{R})$, l'application $\psi \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\gamma(x)dx$ est une forme linéaire continue sur $L^{l'}$, de norme inférieure ou égale à $\int \left(\int |\phi(x,y)|^l dx \right)^{1/l} dy$. Le dual de $L^{l'}$ pouvant être canoniquement identifié à L^l , on obtient que $\gamma \in L^l$ et :

$$\|\gamma\|_l \leq \left(\int \left| \int \phi(x,y)dy \right|^l dx \right)^{1/l}$$

C'est exactement le résultat qu'on souhaitait.

3. a) Le cas $q = 1$ est facile : on a alors $p = r, s = 0$ et l'inégalité demandée est simplement une inégalité triangulaire. Supposons donc $q \neq 1$.

Soit q' tel que $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

On remarque que $sq' = p$.

Par Hölder :

$$\begin{aligned}
|h(x)| &\leq \int |f(x-y)g(y)|dy \\
&= \int |f(x-y)|^s |f(x-y)|^{1-s} |g(y)|dy \\
&\leq \| |f(x-\cdot)|^s \|_{q'} \left(\int |f(x-y)|^{(1-s)q} |g(y)|^q dy \right)^{1/q} \\
&= \left(\int |f(y)|^p dy \right)^{1/q'} \left(\int |f(x-y)|^{(1-s)q} |g(y)|^q dy \right)^{1/q} \\
&= \|f\|_p^{p/q'} \left(\int |f(x-y)|^{(1-s)q} |g(y)|^q dy \right)^{1/q} \\
&= \|f\|_p^s \left(\int |f(x-y)|^{(1-s)q} |g(y)|^q dy \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

b) On a $t \geq 1$. On va donc pouvoir appliquer la question 2.

D'après la question précédente, pour tout x :

$$|h(x)|^q \leq \|f\|_p^{sq} \int |f(x-y)|^{(1-s)q} |g(y)|^q dy$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\|h^q\|_t &\leq \|f\|_p^{sq} \left\| \int |f(x-y)|^{(1-s)q} |g(y)|^q dy \right\|_t \\
&= \|f\|_p^{sq} \left(\int \left| \int |f(x-y)|^{(1-s)q} |g(y)|^q dy \right|^t dx \right)^{1/t} \\
&\leq \|f\|_p^{sq} \int \left(\int |f(x-y)|^{(1-s)q} |g(y)|^q \right)^t dx \Big)^{1/t} dy \\
&= \|f\|_p^{sq} \int \left(\int |f(x-y)|^{(1-s)qt} dx \right)^{1/t} |g(y)|^q dy \\
&= \|f\|_p^{sq} \|f\|_{(1-s)qt}^{(1-s)q} \|g\|_q^q
\end{aligned}$$

c) On a $(1-s)qt = p$ donc $\|h^q\|_t \leq \|f\|_p^q \|g\|_q^q$.

De plus, $\|h^q\|_t = \|h\|_r^q$. En prenant la racine q -ième, on a donc $\|h\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.