Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$3

Exercice 1

1. Le tableau ci-dessous résume les propriétés de la transformée de Fourier pour différents types de signaux. Complétez les cases blanches.

	Signal continu	Signal discret	Signal fini
Définition	$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$	$\hat{f}(r) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) e^{-ikr}$	$\hat{f}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-\frac{2\pi i n k}{N}}$
Formule d'inversion	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$		$f(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n k}{N}}$
Convolution	$\widehat{f \star g} = \hat{f}.\hat{g}$	$\widehat{f \star g} = \hat{f}.\hat{g}$	$\widehat{f \circledast g} = \hat{f}.\hat{g}$
Dérivation	$\widehat{(f')}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$		
Multiplication par t	$\widehat{(tf(t))}(\omega) = i\hat{f}'(\omega)$		
Condition pour que le signal soit réel	$\Leftrightarrow \left(\hat{f}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}\right)$		
Multiplication par une fréquence pure	$\widehat{f(t)e^{i\alpha t}}(\omega) = \hat{f}(\omega - \alpha)$	$\widehat{f(k)e^{i\alpha k}}(r) = \hat{f}(r-\alpha)$	$\widehat{f(k)e^{\frac{2\pi i a k}{N}}}(n) = \hat{f}(n-a)$

2. On peut écrire des définitions similaires pour des signaux à plusieurs dimensions.
Par exemple, la transformée de Fourier d'un signal fini à deux dimensions $f[k,l]$ (avec $0 \le k < N$ et $0 \le l < M$) vaut :

$$\hat{f}[n,m] = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f[k,l] e^{-2\pi i \left(\frac{nk}{N} + \frac{ml}{M}\right)} \qquad (\forall 0 \le n < N, 0 \le m < M)$$

Donner une formule d'inversion.

Exercice 2

Soit $T > 0$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction telle que le support de $\hat{f}$ est inclus dans $[\omega_0 - \frac{\pi}{T}; \omega_0 + \frac{\pi}{T}]$, pour un $\omega_0 \in \mathbb{R}$ connu.
Donner une formule permettant de reconstruire f à partir de $(f(nT))_{n\in\mathbb{Z}}$.

2. On suppose maintenant que f est à valeurs réelles et que le support de $\hat{f}$ est inclus dans $\left[-(N+1)\frac{\pi}{T}; -N\frac{\pi}{T}\right] \cup \left[N\frac{\pi}{T}; (N+1)\frac{\pi}{T}\right]$ pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$.
Donner à nouveau une formule de reconstruction.

Exercice 3 : sous-échantillonage d'un signal discret
Soit $f[n]$ un signal discret. On définit $f_1[n] = f[2n]$.

1. On pose $f_2[n] = f[n]$ si n est pair et $f_2[n] = 0$ si n est impair. Calculer $\hat{f}_2$ en fonction de $\hat{f}$.

2. En déduire une condition suffisante sur f pour qu'on puisse reconstruire f à partir de f_1 (analogue au théorème de Nyquist). Donner une formule de reconstruction.

Exercice 4 : approximation d'un filtre analogique par un filtre discret
On considère un filtre analogique $g(t)$. On souhaite approximer ce filtre par un filtre discret.

1. On l'approxime d'abord par le filtre $h[n] = g(n)$.
a) Donner l'expression de la fonction de transfert $\hat{h}(r)$ du signal discret $h[n]$ en fonction de $\hat{g}$.
b) Donner une condition sur $\hat{g}$ pour que le filtre discret ait les mêmes caractéristiques fréquencielles que le filtre analogique.

2. On souhaite de plus que le filtre $h[n]$ soit à réponse impulsionnelle finie (c'est-à-dire que son support soit fini). On pose donc plutôt $h[n] = g(n)w(n)$, où w est une fonction « fenêtre » à support fini.
a) Calculer la fonction de transfert de h.
b) Comment choisir w ?

3. On suppose maintenant que le filtre analogique est de la forme $\hat{g}(\omega) = N(i\omega)/D(i\omega)$, où N et D sont des polynômes à coefficients réels tels que g est causal et stable.
a) Écrire l'équation différentielle régissant le circuit électronique implémentant ce filtre en fonction des coefficients des polynômes N et D.
b) On remplace, dans l'équation, chaque différentiation $f \to \frac{df}{dt}$ par la différence finie $D : f[n] \to f[n] - f[n-1]$. Calculer la fonction de transfert du filtre discret ainsi obtenu.
c) Ce filtre est-il stable et causal ?
d) Dans quelle mesure ses caractéristiques fréquencielles sont-elles proches des caractéristiques du filtre analogique ?

Exercice 5
Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$.
On veut établir des théorèmes d'échantillonnage sur un espace de fonctions V autre que l'espace des fonctions à bande limitée. On souhaite que, pour toute fonction $f \in V$, la formule suivante soit valable :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\rho(t - nT)$$

où $\{\rho(. - nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille libre de V.

1. Montrer que :

$$\rho(nT) = 0 \text{ si } n \neq 0$$
$$\rho(0) = 1$$

et que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\rho}\left(\omega + \frac{2k\pi}{T}\right) = T$. (On fera l'hypothèse que $\hat{\rho}$ décroît suffisamment rapidement pour que cette somme converge convenablement.)

2. Donner des exemples de couples (ρ, V).

Exercice 6 : suréchantillonnage
On s'intéresse à la vitesse de convergence de la formule de reconstruction

$$f(t) = \sum_n f(n)\mathrm{sinc}(\pi(t-n))$$

où $f \in L^2(\mathbb{R})$ est telle que $\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset [-\pi; \pi]$.
On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $f_N(t) = \sum_{|n|\leq N} f(n)\mathrm{sinc}(\pi(t-n))$.

1. Montrer que $f_N \to f$ dans L^2 et $f_N \to f$ uniformément.

2. a) Montrer que, pour toute f et pour tout t, $|f_N(t) - f(t)| = o(N^{-1/2})$ (quand $N \to +\infty$).
b) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction f telle que, pour tout $N > 0$, $\left|f_N\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \geq N^{-(1/2+\epsilon)}$.

3. On s'intéresse maintenant aux fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
Montrer qu'il existe une fonction ρ telle que, pour toute fonction f de ce genre :

$$f(t) = \sum_n f(n)\rho(t-n)$$

et telle que, si on pose $f_N(t) = \sum_{|n|\leq N} f(n)\rho(t-n)$, on a, pour toute f, tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f_N(t) - f(t) = o(N^{-k}) \qquad \text{quand } N \to +\infty$$

Exercice 7 : convolution rapide
Soient $L, M \in \mathbb{N}^*$ tels que $M < L$.
On considère deux signaux discrets f et h. On suppose que $f[k] = 0$ si $k \notin \{0, ..., L-1\}$ et $h[k] = 0$ si $k \notin \{0, ..., M-1\}$.

1. Montrer que $f \star h[n] = 0$ si $n \notin \{0, ..., L+M-2\}$.

On souhaite maintenant calculer le plus rapidement possible $f \star h[0], ..., f \star h[L+M-2]$.

2. Quelle est la complexité de l'implémentation directe ?

3. Quelle est la complexité de l'implémentation utilisant la transformée de Fourier ? (On rappelle que la transformée de Fourier d'un signal fini de taille N peut être calculée en $O(N\log(N))$ opérations.)

4. On suppose pour simplifier que L est un multiple de M. Décrire un algorithme calculant la convolution en $O(L\log(M))$ opérations.

Exercice 8 : transformée de Fourier rapide
Vous avez vu en cours un algorithme qui calcule la transformée de Fourier circulaire d'un signal de taille N en $O(N\log(N))$ opérations si N est une puissance de 2. Le but de l'exercice est de présenter un algorithme rapide, dû à Rader, adapté au cas où N est un nombre premier.

1. [Convolution rapide]
Soient g, h deux signaux de taille n. On souhaite calculer la convolution circulaire $g \star h$.
a) Soit $m \geq 2n-1$ une puissance de 2. On définit deux signaux de taille m, g' et h' :

$$g' = [g(0), 0, ..., 0, g(1), ..., g(n-1)] \qquad \text{et} \qquad \forall k = 0, ..., m-1, \quad h'[k] = h[k \bmod m]$$

Exprimer $g \star h$ en fonction de $g' \star h'$.
b) En déduire qu'on peut calculer $g \star h$ en $O(n\log(n))$ opérations.

2. Soit maintenant p un nombre premier et f un signal de taille p.
On rappelle que, pour tout entier k non-divisible par p, $k^{p-1} \equiv 1[p]$.
On admet le résultat suivant : il existe a compris entre 1 et $p-1$ tel que $\{1, 2, ..., p-1\} = \{1, a, a^2, ..., a^{p-2}\}$. Ici, ce qu'on note a^s est en fait le reste de a^s dans la division par p.
a) Montrer que, pour tout k :

$$\hat{f}[a^{p-1-k}] = f[0] + (\tilde{f} \star g)[k]$$

où $\tilde{f} = [f(1), f(a), ..., f(a^{p-2})]$ et $g[l] = e^{-\frac{2\pi i}{p} a^{p-1-l}}$ pour $l = 0, ..., p-2$.
b) En déduire qu'on peut calculer la transformée de Fourier d'un signal f de taille p en $O(p\log(p))$ opérations (en négligeant le temps de calcul de a).