Feuille d'exercices n^{o}3
Corrigé

Exercice 1

1. Formule d'inversion pour un signal discret : la fonction $\hat{f}$ est 2π-périodique. Puisque, par définition, $\hat{f}(r) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(-k)e^{ikr}$, les $(f(-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ sont les coefficients de f dans la décomposition en série de Fourier. On a donc :

$$f(-k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r)e^{-ikr}dr$$

et, en remplaçant k par $-k$:

$$f(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r)e^{ikr}dr$$

Multiplication par t (ici k) pour un signal discret :

$$\begin{aligned}\widehat{kf(k)}(r) &= \sum_k kf(k)e^{-ikr} = i\sum_k f(k)(-ik)e^{-ikr}\\ &= i\sum_k f(k)\left(e^{-ikr}\right)' = i\left(\sum_k f(k)e^{-ikr}\right)'\\ &= if'(r)\end{aligned}$$

(Il faut bien sûr supposer que $(f(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ décroît suffisamment rapidement lorsque $|k| \to +\infty$, de façon à ce que les sommes convergent.)

Condition pour que le signal soit réel pour un signal discret : si f est réel, on a pour tout r

$$\begin{aligned}\hat{f}(r) &= \sum_k f(k)e^{-ikr} = \sum_k \overline{f(k)}e^{-ikr}\\ &= \overline{\sum_k f(k)e^{ikr}} = \overline{\hat{f}(-r)}\end{aligned}$$

Si f est à images réelles, on doit donc avoir $\hat{f}(r) = \overline{\hat{f}(-r)}$. Réciproquement, si $\hat{f}(r) = \overline{\hat{f}(-r)}$, le signal f est réel car, pour tout k :

$$\begin{aligned}\overline{f(k)} &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r)e^{ikr}dr}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\hat{f}(r)}e^{-ikr}dr\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(-r)e^{-ikr}dr\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r)e^{ikr}dr = f(k)\end{aligned}$$

Condition pour que le signal soit réel pour un signal fini : si f est réel, on a pour tout $n \in \{1, ..., N-1\}$

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \sum_k \overline{f(k)} e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \\ &= \overline{\sum_k f(k) e^{\frac{2\pi i n k}{N}}} \\ &= \overline{\sum_k f(k) e^{-\frac{2\pi i (N-n) k}{N}}} \\ &= \overline{\hat{f}(N-n)}\end{aligned}$$

Pour $n = 0$, on a $\hat{f}(0) = \overline{\hat{f}(0)}$.
Si le signal est réel, on a donc $\hat{f}(0) = \overline{\hat{f}(0)}$ (c'est-à-dire $f(0) \in \mathbb{R}$), $\hat{f}(1) = \overline{\hat{f}(N-1)}, \hat{f}(2) = \overline{\hat{f}(N-2)}, ...$
Cette condition suffit à ce que le signal soit réel. En effet, si elle est vérifiée, on a, pour tout k :

$$\begin{aligned}\overline{f(k)} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\hat{f}(n)} e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \\ &= \hat{f}(0) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \hat{f}(N-n) e^{\frac{2\pi i (N-n) k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n k}{N}} = f(k)\end{aligned}$$

2. On définit d'abord un signal bidimensionnel $(g[k,m])_{0 \le k < N, 0 \le m < M}$ par :

$$g[k,m] = \sum_{l=0}^{M-1} f[k,l] e^{-2\pi i \frac{lm}{M}}$$

(c'est-à-dire que, pour tout k, $g[k,.]$ est la transformée de Fourier de $f[k,.]$)
Alors, pour tous n, m :

$$\hat{f}[n,m] = \sum_{k=0}^{N-1} g[k,m] e^{-2\pi i \frac{kn}{N}}$$

(c'est-à-dire que, pour tout m, $\hat{f}[.,m]$ est la transformée de Fourier de $g[.,m]$)
D'après la formule d'inversion dans le cas à une dimension, on a, pour tout m et pour tout k :

$$g[k,m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}[n,m] e^{2\pi i \frac{kn}{N}}$$

Également d'après la formule d'inversion en dimension 1, on a, pour tous k, l :

$$f[k,l] = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} g[k,m] e^{2\pi i \frac{ml}{M}}$$

et donc en remplaçant g par sa valeur en fonction de $\hat{f}$:

$$f[k,l] = \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\hat{f}[n,m]e^{2\pi i\left(\frac{kn}{N}+\frac{ml}{M}\right)}$$

Exercice 2

1. Posons $g(t) = f(t)e^{-i\omega_0 t}$. Puisque $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega+\omega_0)$, $\hat{g}$ est à support dans $[-\pi/T;\pi/T]$. On a donc, d'après le théorème de Nyquist, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(nT)\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-i\omega_0 nT}\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)$$

et donc :

$$f(t) = e^{i\omega_0 t}g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{i\omega_0(t-nT)}\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)$$

2. Nous allons calquer le raisonnement sur celui effectué en cours pour le cas des signaux dont la transformée de Fourier est à support dans $[-\pi/T;\pi/T]$.
Posons $f_d(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\delta_{nT}$. La transformée de Fourier de $\hat{f}_d$ vaut (c'est dans le cours) :

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\omega - 2k\pi/T)$$

Vu le support de $\hat{f}$, on a :

$$\hat{f}(\omega) = T\hat{f}_d(\omega)1_{\left[-(N+1)\frac{\pi}{T};-N\frac{\pi}{T}\right]\cup\left[N\frac{\pi}{T};(N+1)\frac{\pi}{T}\right]}(\omega)$$

On a donc $f = f_d \star h$ où h est la fonction telle que :

$$\hat{h}(\omega) = T1_{\left[-(N+1)\frac{\pi}{T};-N\frac{\pi}{T}\right]\cup\left[N\frac{\pi}{T};(N+1)\frac{\pi}{T}\right]}(\omega)$$

On a :

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{2\pi}\int \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{T}{2\pi}\left(\left[\frac{e^{i\omega t}}{it}\right]_{-(N+1)\frac{\pi}{T}}^{-N\frac{\pi}{T}} + \left[\frac{e^{i\omega t}}{it}\right]_{N\frac{\pi}{T}}^{(N+1)\frac{\pi}{T}}\right) \\
&= \frac{T}{2\pi i t}\left(e^{-N\pi t/T} - e^{-(N+1)\pi t/T} + e^{(N+1)\pi t/T} - e^{N\pi t/T}\right) \\
&= \frac{T}{\pi t}\left(\sin((N+1)\pi t/T) - \sin(N\pi t/T)\right) \\
&= (N+1)\mathrm{sinc}\left(\frac{(N+1)\pi t}{T}\right) - N\mathrm{sinc}\left(\frac{N\pi t}{T}\right)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\delta_{nT} \star h(t) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)h(t-nT)
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. Montrons que $\hat{f}_2(r) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(r) + \hat{f}(r+\pi)\right)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\hat{f}(r) + \hat{f}(r+\pi)\right) &= \frac{1}{2}\left(\sum_n f[n]e^{-inr} + \sum_n f[n]e^{-in(r+\pi)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_n f[n]e^{-inr}(1+(-1)^n) \\
&= \sum_{n \text{ pair}} f[n]e^{-inr} \\
&= \sum_n f_2[n]e^{-inr} = \hat{f}_2(r)
\end{aligned}$$

2. Si $\hat{f}$ vaut 0 sur $[-\pi;\pi] - \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, on a (puisque $\hat{f}$ est 2π-périodique) :

$$\hat{f}_2(r) = \frac{1}{2}\hat{f}(r) \text{ si } r \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

On a donc, pour tout r :

$$\hat{f}(r) = 2\hat{f}_2(r)1_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \bmod 2\pi}(r)$$

et donc $f = 2f_2 \star h$ où h est le signal discret tel que :

$$\hat{h}(r) = 1_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \bmod 2\pi}(r)$$

c'est-à-dire, d'après la question 1. de l'exercice 1 :

$$\begin{aligned}
h[k] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{h}(r)e^{ikr}dr \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{ikr}}{ik}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{\pi k}\sin(k\pi/2)
\end{aligned}$$

(sauf pour $k=0$ où on a $h[0] = \frac{1}{2}$)
De manière plus concise, $2h[k] = \mathrm{sinc}(k\pi/2)$.
On a donc, pour tout n :

$$f[n] = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_2[k]h[n-k] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f[2k]\mathrm{sinc}((n-2k)\pi/2)$$

Exercice 4

1. a) $\hat{h}(r) = \sum\limits_{n} g(n)e^{-inr} = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum\limits_{n} g(n)\delta_n(x)\right) e^{-irx}dx$

La transformée de Fourier discrète $\hat{h}$ est donc égale à la transformée de Fourier continue de $\left(\sum\limits_{n} g(n)\delta_n(x)\right)$. D'après le cours, elle vaut donc :

$$\hat{h}(r) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(r - 2k\pi)$$

b) Il faut que le support de $\hat{g}$ soit inclus dans $[-\pi;\pi]$. Ainsi, les fonctions de transfert des filtres discrets et continus coïncident sur $[-\pi;\pi]$.

2. a) De même qu'à la question 1.a), $\hat{h}$ est la transformée de Fourier continue de la fonction $\sum\limits_{n} g(n)w(n)\delta_n = g.\left(\sum\limits_{n} w(n)\delta_n\right)$.

On a donc $\hat{h} = \frac{1}{2\pi}\hat{g} \star \widehat{\left(\sum\limits_{n} w(n)\delta_n\right)}$. De plus, la transformée de Fourier continue $\widehat{\left(\sum\limits_{n} w(n)\delta_n\right)}$ est exactement égale à la transformée de Fourier discrète $\hat{w}$.

On a donc $\hat{h} = \frac{1}{2\pi}\hat{g} \star \hat{w}$.

b) Lorsque w est identiquement égale à 1 (et n'est donc pas à support fini), $\frac{1}{2\pi}\hat{w}$ est le peigne de diracs $\sum\limits_{k} \delta_{2\pi k}$. On retrouve bien le résultat de la question 1.a) : $\hat{h}$ est la version 2π-périodisée de $\hat{g}$.

En revanche, lorsque w n'est pas identiquement égale à 1, $\hat{w}$ n'est plus un peigne de diracs parfait. Pour que $\hat{h}$ soit la plus proche possible de la périodisée de $\hat{g}$, il faut prendre $\hat{w}$ la plus « concentrée » possible autour des réels de la forme $2\pi k$.

Les considérations présentées dans l'exercice sur le fenêtrage du TD de la semaine dernière s'appliquent toujours. Des versions discrétisées des fenêtres de Hann ou de Hamming seraient des choix raisonnables.

3. a) On écrit $N(X) = a_0 + a_1X + ... + a_cX^c$ et $D(X) = b_0 + b_1X + ... + b_dX^d$.

L'équation différentielle est $b_0f_s + b_1\frac{df_s}{dt} + ... + b_d\frac{d^df_s}{dt^d} = a_0f_e + a_1\frac{df_e}{dt} + ... + a_c\frac{d^cf_e}{dt^c}$, où f_e est le signal d'entrée et f_s le signal de sortie.

b) L'équation devient :

$$b_0f_s + b_1Df_s + ... + b_dD^df_s = a_0f_e + a_1Df_e + ... + a_cD^cf_e \tag{1}$$

Pour une fonction f donnée, calculons $\widehat{Df}$ en fonction de $\hat{f}$:

$$\begin{aligned} Df(r) &= \sum_n (f[n] - f[n-1])e^{-inr} \\ &= \sum_n f[n]e^{-inr} - e^{-ir}\sum_n f[n-1]e^{-i(n-1)r} \\ &= (1 - e^{-ir})\hat{f}(r) \end{aligned}$$

D'après l'équation 1, on a donc :

$$\hat{f}_s(b_0 + (1 - e^{-ir})b_1 + ... + (1 - e^{-ir})^d b_d) = \hat{f}_e(a_0 + (1 - e^{-ir})a_1 + ... + (1 - e^{-ir})^c a_c)$$

La fonction de transfert est donc $H(r) = \frac{a_0+(1-e^{-ir})a_1+...+(1-e^{-ir})^c a_c}{b_0+(1-e^{-ir})b_1+...+(1-e^{-ir})^d b_d} = \frac{N(1-e^{-ir})}{D(1-e^{-ir})}$.
c) Le cours dit qu'un filtre discret correspondant à une fonction de transfert de la forme $P(e^{-ir})/Q(e^{-ir})$ est stable et causal si et seulement si tous les pôles z_0 de $z \to P(z^{-1})/Q(z^{-1})$ vérifient $|z_0| < 1$. Cherchons donc si cette propriété est vérifiée ici.
Un complexe z_0 est un pôle de $P(1-z^{-1})/Q(1-z^{-1})$ si et seulement si $1-z_0^{-1}$ est un pôle de N/D. Puisque N/D correspond à un filtre stable et causal, cette fraction rationnelle n'a que des pôles de partie réelle strictement négative (voir l'exercice 2 du TD de la semaine dernière) donc, si on pose $\lambda = 1 - z_0^{-1}$, on a $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.
Donc $z_0 = \frac{1}{1-\lambda}$. Comme $|1-\lambda| \geq \mathrm{Re}(1-\lambda) > 1$, $|z_0| < 1$. Donc la propriété voulue est vérifiée. Le filtre est stable et causal.
d) On a $\frac{N(1-e^{-ir})}{D(1-e^{-ir})} \approx \frac{N(ir)}{D(ir)}$ lorsque $|r| << 1$. Les deux fonctions de transfert sont donc similaires au voisinage de 0 (mais pas nécessairement ailleurs).

Exercice 5

1. Puisque ρ appartient à V, on doit avoir $\rho(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \rho(nT)\rho(t-nT)$, c'est-à-dire $\rho = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \rho(.-nT)$ si on pose $\alpha_n = \rho(nT)$.
On souhaite de plus que $\{\rho(.-nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une famille libre. On doit donc avoir $\alpha_n = 1$ si $n = 0$ et $\alpha_n = 0$ sinon, c'est-à-dire $\rho(0) = 1$ et $\rho(nT) = 0$ si $n \neq 0$.
Notons $G(\omega) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\rho}\left(\omega + \frac{2k\pi}{T}\right)$. C'est une fonction $2\pi/T$-périodique.
Pour tout $l \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi/T} G(\omega)e^{iTl\omega}d\omega &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi/T} \hat{\rho}\left(\omega + \frac{2k\pi}{T}\right) e^{iTl\omega}d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(\omega)e^{iTl\omega}d\omega \\
&= 2\pi\rho(Tl) \\
&= 2\pi\delta_0(l) = \int_0^{2\pi/T} Te^{iTl\omega}d\omega
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi/T}(G(\omega) - T)e^{iTl\omega}d\omega = 0$. Puisque $\{e^{iTl.}\}_{l\in\mathbb{Z}}$ forme une base de $L^2([0; 2\pi/T])$, on doit avoir $G - T = 0$ sur $[0; 2\pi/T]$, soit $G = T$ sur $[0; 2\pi/T]$ et donc $G = T$ sur tout $\mathbb{R}$ car G est $2\pi/T$-périodique.

2. Le théorème de Nyquist traite le cas où $\hat{\rho} = T1_{[-\pi/T;\pi/T]}$ (et les fonctions V sont les fonctions à bande limitée dans $[-\pi/T; \pi/T]$).
Un autre cas simple est celui où V est l'ensemble des fonctions constantes sur les intervalles de la forme $\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)T; \left(n+\frac{1}{2}\right)T\right]$, avec la fonction $\rho = 1_{[-T/2;T/2]}$.
De plus, on peut vérifier que la condition nécessaire trouvée à la question précédente ($\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\rho}(\omega + 2k\pi/T) = T$) est aussi une condition suffisante pour que la formule de reconstruction soit vraie, si on pose $V = \{\sum\limits_k a_k\rho(.-kT)\}$. Toutes les fonctions ρ telles que $\hat{\rho}$ vérifie la condition conviennent donc.
L'exemple le plus simple est $\hat{\rho} = T1_{[-\pi/T;\pi/T]}$ mais on peut en construire une infinité d'autres. Un autre exemple simple, par exemple, est $\hat{\rho}(\omega) = \frac{T^2}{2\pi}\max\left(0, \frac{2\pi}{T} - \omega\right)$.

Pour chaque choix de ρ, $V = \{\sum_k a_k \rho(. - kT)\}$ est l'ensemble des fonctions f dont la transformée de Fourier est de la forme $\hat{f}(\omega) = \hat{\rho}(\omega) S(\omega)$, pour S une fonction $2\pi/T$-périodique quelconque. En effet, la transformée de Fourier d'une fonction de la forme $\sum_k a_k \rho(. - kT)$ vaut :

$$\hat{\rho}(\omega). \left(\sum_k a_k e^{-i\omega kT} \right)$$

et les fonctions qui peuvent s'écrire sous la forme $\left(\sum_k a_k e^{-i\omega kT} \right)$ sont exactement les fonctions $2\pi/T$ périodiques.

Exercice 6

1. Pour tout n, notons $\rho_n = \mathrm{sinc}(\pi(. - n))$. Pour tout n :

$$\hat{\rho}_n(\omega) = 1_{[-\pi;\pi]}(\omega) e^{-in\omega}$$

Les fonctions $\left\{ \frac{\hat{\rho}_n}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une base de Hilbert de $L^2([-\pi;\pi])$.
De plus, pour tout n, $f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\omega) e^{in\omega} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \hat{f}, \frac{\hat{\rho}_n}{\sqrt{2\pi}} \rangle$.
La fonction $\hat{f}_N = \sum_{|n| \le N} \langle \hat{f}, \frac{\hat{\rho}_n}{\sqrt{2\pi}} \rangle \frac{\rho_n}{\sqrt{2\pi}}$ est donc la projection de $\hat{f}$ sur Vect $\{\rho_{-N}, ..., \rho_{N-1}, \rho_N\}$.
Donc $\hat{f}_N \to \hat{f}$ dans L^2. Puisque $||f_N - f||_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||\hat{f}_N - \hat{f}||_2$, $||f_N - f||_2 \to 0$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $||\hat{f}_N - \hat{f}||_1 \le \sqrt{2\pi} ||\hat{f}_N - \hat{f}||_2$. D'après la formule d'inversion de la transformée de Fourier, $||f_N - f||_\infty \le \frac{1}{2\pi} ||\hat{f}_N - \hat{f}||_1$ donc :

$$||f_N - f||_\infty \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||\hat{f}_N - \hat{f}||_2 \to 0$$

2. a) Pour tout t, d'après Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |f(t) - f_N(t)| &\le \sum_{|n|>N} |f(n)|.|\mathrm{sinc}(\pi(t-n))| \\ &\le \sum_{|n|>N} \frac{|f(n)|}{\pi(t-n)} \\ &\le \frac{1}{\pi} \sqrt{\sum_{|n|>N} |f(n)|^2} \sqrt{\sum_{|n|>N} \frac{1}{|t-n|^2}} \end{aligned}$$

D'après le raisonnement de la question précédente, $\sqrt{\sum_{|n|>N} |f(n)|^2}$ est (à une constante multiplicative près) la norme de la projection de $\hat{f}$ sur l'orthogonal de Vect $\{\rho_{-N}, ..., \rho_{N-1}, \rho_N\}$. Cette norme tend vers 0 donc :

$$|f(t) - f_N(t)| = o\left(\sqrt{\sum_{|n|>N} \frac{1}{|t-n|^2}} \right)$$

Lorsque $N \to +\infty$, $\sum\limits_{|n|>N} \frac{1}{|t-n|^2} \sim \sum\limits_{|n|>N} \frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{N}\right)$ donc $|f(t) - f_N(t)| = o(N^{-1/2})$.
b) On pose $f(t) = C \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} n^{-(1/2+\epsilon)}(-1)^n \mathrm{sinc}(\pi(t-n))$, avec $C > 0$ une constante qui devra être choisie suffisamment grande.
C'est bien une fonction de L^2 (car les fonctions $\mathrm{sinc}(\pi(.-n))$ sont orthogonales entre elles et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(n^{-(1/2+\epsilon)}\right)^2 < +\infty$) dont la transformée de Fourier est à support dans $[-\pi;\pi]$ (car les transformées de Fourier des $\mathrm{sinc}(\pi(.-n))$ ont cette propriété).
On vérifie qu'on a $f(1/2) = C \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^{-(1/2+\epsilon)}}{\pi(1/2-n)}$ et $f_N(1/2) = C \sum\limits_{0<n\leq N} \frac{n^{-(1/2+\epsilon)}}{\pi(1/2-n)}$.
On a donc $|f_N(1/2) - f(1/2)| = \frac{C}{\pi} \sum\limits_{n>N} \frac{n^{-(1/2+\epsilon)}}{n-1/2}$.
Lorsque $N \to +\infty$, $\sum\limits_{n>N} \frac{n^{-(1/2+\epsilon)}}{n-1/2} \sim \sum\limits_{n>N} n^{-(3/2+\epsilon)} \sim \frac{N^{-(1/2+\epsilon)}}{1/2+\epsilon}$. Si on choisit C assez grand, on a donc :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad |f_N(1/2) - f(1/2)| \geq N^{-(1/2+\epsilon)}$$

3. On choisit $\hat{\rho}$ vérifiant les propriétés suivantes :
– $\hat{\rho}$ est une fonction de Schwartz.
– $\hat{\rho}$ est à support dans $[-\pi;\pi]$.
– $\hat{\rho}$ vaut 1 sur $[-\pi/2;\pi/2]$.
Pour toute fonction f telle que $\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\hat{f} = \hat{f}\hat{\rho}$$

donc $f = f \star \rho$ et, puisque $f(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\mathrm{sinc}(\pi(t-n))$, on a :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \left(\mathrm{sinc}(\pi.) \star \rho\right)(t-n)$$

La transformée de Fourier de $\mathrm{sinc}(\pi.) \star \rho$ vaut $1_{[-\pi;\pi]}\hat{\rho} = \hat{\rho}$ donc :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\rho(t-n)$$

Comme on l'a vu dans les questions précédentes, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^2 < +\infty$ donc $(f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.
Puisque ρ est une fonction de Schwarz, $(\rho(t-n))_{n\in\mathbb{Z}}$ décroît plus vite que tout polynôme lorsque $|n| \to +\infty$ (pour t fixé) donc $|f_N(t) - f(t)| \leq \max\limits_n |f(n)| \sum\limits_{n>N} |\rho(t-n)|$ décroît également plus vite que tout polynôme lorsque $N \to +\infty$.

Exercice 7

1. $f \star h[n] = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} h[k]f[n-k] = \sum\limits_{k=0}^{M-1} h[k]f[n-k]$.
Pour que cette somme soit non-nulle, il faut qu'il existe $k \in \{0, ..., M-1\}$ tel que $f[n-k] \neq 0$.
Il doit donc exister $k \in \{0, ..., M-1\}$ tel que $n - k = l$, avec $l \in \{0, ..., L-1\}$.
Alors $n = k + l$ et puisque k est compris entre 0 et $M-1$ et l entre 0 et $L-1$, on a $0 \leq n \leq M + L - 2$.

2. Il faut calculer chacun des $h[k]f[l]$ pour $0 \leq k < M$ et $0 \leq l < L$. Ensuite, chaque $f \star h[n]$ s'écrit comme une somme de ces éléments, chaque $h[k]f[l]$ n'étant utilisé qu'une seule fois (pour $n = l + k$). Il y a donc ML produits et à peu près ML additions à effectuer. La complexité est $O(ML)$.

3. Le cours explique pourquoi, avec la transformée de Fourier rapide, la convolution de deux signaux discrets dont le support est inclus dans $\{0, ..., L-1\}$ peut se calculer en temps $O(L\log(L))$. Puisque h et f ont tous deux leurs supports inclus dans $\{0, ..., L-1\}$, cet algorithme est applicable ici et donne un nombre d'opérations en $O(L\log(L))$.

4. Pour tout $s = 0, ..., L/M - 1$, on définit le signal f_s par :

$$\begin{aligned} f_s[k] &= f[k] \text{ si } sM \leq k < (s+1)M \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Pour tout s, le support de f_s est de taille M donc, d'après la question précédente, on peut calculer $f_s \star h$ en temps $O(M\log(M))$.

De plus, de même qu'à la question 1., le support de $f_s \star h$ est inclus dans $\{sM, sM+1, ..., (s+2)M-2\}$.

Pour tout n, $f \star h[n] = f_0 \star h[n] + f_1 \star h[n] + ... + f_{L/M-1} \star h[n]$ mais, vu les supports de ces fonctions, seuls deux termes de la somme au plus sont non-nuls (pour n fixé). Pour tout n, on peut donc calculer $f \star h[n]$ en une seule addition à partir des $f_s \star h[n]$.

Le temps de calcul est donc la somme des temps de calcul des $f_s \star h$ et des $M + L - 1$ additions finales. Ce temps est donc $\frac{L}{M}O(M\log(M)) + M + L - 1 = O(L\log(M))$.

Exercice 8

1. a) Pour tout $s = 0, ..., n-1$:

$$\begin{aligned} g \star h[s] &= \sum_{k=0}^{n-1} g[k]h[(s-k) \bmod n] \\ &= g'[0]h'[s] + \sum_{k=1}^{n-1} g'[k+m-n]h[(s-k) \bmod n] \\ &= g'[0]h'[s] + \sum_{k=1}^{n-1} g'[k+m-n]h'[n+s-k] \\ &= g'[0]h'[s] + \sum_{k=m-n+1}^{m-1} g'[k]h'[m+s-k] \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} g'[k]h'[(m+s-k) \bmod m] \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} g'[k]h'[(s-k) \bmod m] \\ &= g' \star h'[s] \end{aligned}$$

b) Définissons m comme la plus petite puissance de 2 supérieure ou égale à $2n-1$. Alors $2n - 1 \leq m < 2(2n-1)$; en particulier, $m \leq 4n$.

Calculer g' et h' en fonction de g et h se fait en $O(m) = O(n)$ opérations. Puisque g' et h' ont pour longueur une puissance de 2, leur convolution se calcule (au moyen de la transformée de Fourier rapide) en $O(m\log(m)) = O(n\log(n))$ opérations.
Comme on a vu que $g \star h$ était égale aux n premiers coefficients de $g' \star h'$, $g \star h$ se calcule en $O(n\log(n))$ opérations.
2. a)

$$\begin{aligned}
f[0] + (\tilde{f} \star g)[k] &= f[0] + \sum_{s=0}^{p-2} \tilde{f}[s] g[k-s] \\
&= f[0] + \sum_{s=0}^{p-2} f[a^s] e^{-\frac{2\pi i}{p} a^{p-1-k+s}} \\
&= f[0] + \sum_{s=0}^{p-2} f[a^s] e^{-\frac{2\pi i}{p} a^{p-1-k} a^s} \\
&= f[0] + \sum_{r=1}^{p-1} f[r] e^{-\frac{2\pi i}{p} a^{p-1-k} r} \\
&= \sum_{r=0}^{p-1} f[r] e^{-\frac{2\pi i}{p} a^{p-1-k} r} = \hat{f}[a^{p-1-k}]
\end{aligned}$$

b) Les signaux $\tilde{f}$ et g se calculent en $O(p)$ opérations, si a est connu. D'après la question 1., $\tilde{f} \star g$ se calcule en $O(p\log(p))$ opérations donc $(\hat{f}[a^{p-1-k}])_{0 \le k \le p-1}$ se calcule en $O(p\log(p))$ opérations. Puisque $\hat{f}$ se déduit de ce signal en $O(p)$ opérations, $\hat{f}$ se calcule également en $O(p\log(p))$ opérations.