Feuille d'exercices n°4

Exercice 1 : fréquence instantanée
Soit g une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact et à valeurs réelles telle que $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = 1$.
On définit la transformée de Fourier à fenêtre d'une fonction f par :

$$Sf(u,\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u)e^{-i\xi t}dt$$

1. a) On suppose que $f(t) = \exp(i\omega_0 t)$. Exprimer $Sf(u,\xi)$ en fonction de $\hat{g}$.
b) Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi |Sf(u,\xi)|^2 d\xi = \omega_0$.
2. a) On suppose que $f = \exp(i\phi(t))$. Montrer que, pour tout u, $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |Sf(u,\xi)|^2 d\xi = 1$.
b) Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi |Sf(u,\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \phi'(t)|g(t-u)|^2 dt$.
c) Comment interpréter ce résultat ?
3. Que se passe-t-il si on prend la partie réelle de ce signal ?

Exercice 2 : transformée de Wigner-Ville
La transformée de Wigne-Ville d'une fonction f est définie par :

$$P_V f(u,\xi) = \int_{\mathbb{R}} f\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(u - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i\tau\xi} d\tau$$

1. Montrer que :

$$P_V f(u,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}\left(\xi + \frac{\gamma}{2}\right) \overline{\hat{f}\left(\xi - \frac{\gamma}{2}\right)} e^{i\gamma u} d\gamma$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
a) Montrer que si $f(x) = 0$ pour tout $x \notin [a;b]$, alors $P_V f(u,\xi) = 0$ pour tout $u \notin [a;b]$.
b) Montrer que si $\hat{f}(\omega) = 0$ pour tout $\omega \notin [a;b]$, alors $P_V f(u,\xi) = 0$ pour tout $\xi \notin [a;b]$.
3. Montrer les égalités suivantes :

$$\forall \xi, \quad \int_{\mathbb{R}} P_V f(u,\xi) du = |\hat{f}(\xi)|^2 \qquad \forall u, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} P_V f(u,\xi) d\xi = |f(u)|^2$$

4. Soit g une fonction « fenêtre » centrée en 0, de support $[-1;1]$, assez concentrée en basses fréquences. Soient $\omega_1, \omega_2, u_1, u_2$ des réels tels que $|u_1 - u_2| \gg 2$.
a) On suppose que $f(t) = g(t-u_1)e^{i\omega_1 t} + g(t-u_2)e^{i\omega_2 t}$. Montrer que $P_V f$ est la somme de trois composantes localisées en temps et en fréquence.
b) Quel problème la transformée de Wigner-Ville pose-t-elle dans le cadre de l'étude temps-fréquence de signaux ?
5. [Plus difficile] Dans cette question, on montre qu'il n'existe pas de fonction quadratique $P_V : \mathcal{S} \to L^1(\mathbb{R}^2)$ telle que P_V vérifie les deux égalités de la question 3. et $P_V(f) \geq 0$ pour toute fonction f. Ici, $\mathcal{S}$ désigne la classe de Schwarz. On dit que P_V est quadratique s'il existe $Q_V : \mathcal{S}^2 \to L^1(\mathbb{R}^2)$ qui soit linéaire en la deuxième variable, anti-linéaire en la première et qui vérifie :

$$\forall f \in \mathcal{S}, P_V(f) = Q_V(f,f) \qquad \text{et} \qquad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{S}, Q_V(f_1,f_2) = \overline{Q_V(f_2,f_1)}$$

Supposons par l'absurde qu'une telle fonction P_V existe. Notons Q_V la forme bilinéaire associée.

a) Montrer que, si f est à support dans un compact $U \subset \mathbb{R}$, alors $P_V f(u,\xi) = 0, \forall u \notin U$.
b) Montrer que si f_1 et f_2 sont à support dans des compacts disjoints U_1, U_2, alors $Q_V(f_1, f_2) = 0$. [Indication : Considérer $P_V(af_1 + bf_2)$ pour $a, b \in \mathbb{C}$.]
c) En déduire que, si f_1 et f_2 sont comme à la question précédente, alors $|\widehat{(f_1+f_2)}(\xi)|^2 = |\hat{f}_1(\xi)|^2 + |\hat{f}_2(\xi)|^2$ pour tout ξ.
d) Conclure.

Exercice 3 : discrétisation de la transformée de Fourier à fenêtre
On considère la transformée de Fourier à fenêtre Sf associée à une fenêtre réelle g.
On suppose que Δu et $\Delta \xi$ sont des réels strictement positifs fixés et on se demande si on peut reconstruire f à partir des $Sf(n\Delta u, m\Delta\xi)$ avec $n, m \in \mathbb{Z}$.
Pour tous n, m, on pose :

$$g_{n\Delta u, m\Delta\xi}(t) = g(t - n\Delta u)e^{im\Delta\xi t}$$

1. On propose la formule de reconstruction suivante :

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} Sf(n\Delta u, m\Delta\xi) g_{n\Delta u, m\Delta\xi}(t)$$

Montrer que, si $(g_{n\Delta u, m\Delta\xi})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ est une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$, alors $\tilde{f} = f$.

2. Donner des exemples simples de $g, \Delta u$ et $\Delta\xi$ tels que $(g_{n\Delta u, m\Delta\xi})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ est une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$. Ces exemples sont-ils bien adaptés pour détecter les fréquences instantanées ?

Exercice 4 : noyau reproduisant
On note toujours $Sf(u,\xi)$ la transformée de Fourier à fenêtre associée à une fonction fenêtre g.
1. Donner l'expression d'une fonction $K(u, u', \xi, \xi')$ dépendant de g et telle que :

$$Sf(u,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\int Sf(u',\xi')K(u,u',\xi,\xi')du'd\xi'$$

2. Soit V l'espace des fonctions $F(u,\xi)$ telles qu'il existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ vérifiant $F(u,\xi) = Sf(u,\xi)$.
a) Montrer que $V \subset L^2(\mathbb{R}^2)$.
b) Soit P l'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^2)$ défini par :

$$PF(u,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\int F(u',\xi')K(u,u',\xi,\xi')du'd\xi'$$

Montrer que P est le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R}^2)$ sur V (pour le K que vous avez trouvée).

Exercice 5 : algorithme de Savitzky-Golay
Soit $X[n]$ un signal réel. On suppose que X est de la forme $X[n] = D[n] + B[n]$ où D est un signal « lisse » et B est un « bruit ». L'algorithme présenté dans cette exercice donne une méthode pour débruiter X et évaluer les dérivées de D à partir de X.
On suppose fixés deux entiers strictement positifs N et d, avec $d < 2N+1$.
Pour tout n, on note P_n le polynôme réel de degré d tel que la quantité suivante est minimale :

$$\sum_{k=n-N}^{n+N} |X[k] - P_n(k)|^2$$

On pose $Y_{N,d}^{(i)}[n] = P_n^{(i)}(n)$. C'est une approximation de la i-ème dérivée de D au point n.

1. Montrer que, pour tout n, P_n est bien défini.

2. Montrer que, pour tout i, il existe un filtre à support fini $h_{N,d}^{(i)}$ tel que, pour tout n, $Y_{N,d}^{(i)}[n] = h_{N,d}^{(i)} \star X[n]$.