Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$4

Corrigé

Exercice 1

1. a) $Sf(u,\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(t-u)e^{-i(\xi-\omega_0)t}dt = e^{-iu(\xi-\omega_0)} \int_{\mathbb{R}} g(t')e^{-i(\xi-\omega_0)t'}dt' = e^{-iu(\xi-\omega_0)}\hat{g}(\xi-\omega_0)$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi|Sf(u,\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi|\hat{g}(\xi-\omega_0)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (\xi-\omega_0)|\hat{g}(\xi-\omega_0)|^2 d\xi + \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi|\hat{g}(\xi|^2 d\xi + \omega_0 \\
&= \omega_0
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = 1$ et le fait que $\xi|\hat{g}(\xi)|^2$ est une fonction impaire (à cause du fait que g est réelle et que $\hat{g}(-\xi) = \overline{\hat{g}(\xi)}$) et que donc son intégrale est nulle.

2. a) $Sf(u,.)$ est la transformée de Fourier de la fonction $f(.)g(.-u)$. On a donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |Sf(u,\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(t-u)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |g(t-u)|^2 dt = 1$$

b) On utilise l'égalité $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{h}_1\overline{\hat{h}}_2 = \int_{\mathbb{R}} h_1\overline{h}_2$ et le fait que, puisque $\xi \to Sf(u,\xi)$ est la transformée de Fourier de $f(.)g(.-u)$, $(i\xi)Sf(u,\xi)$ est la transformée de Fourier de $(f(.)g(.-u))' = f'(.)g(.-u) + f(.)g'(.-u)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi|Sf(u,\xi)|^2 d\xi &= \frac{-i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i\xi Sf(u,\xi)\overline{Sf(u,\xi)}d\xi \\
&= (-i)\int_{\mathbb{R}} (f'(t)g(t-u) + f(u)g'(t-u))\overline{f(t)g(t-u)}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi'(t)|g(t-u)|^2 - ig'(t-u)\overline{g(t-u)}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi'(t)|g(t-u)|^2 dt - i\left[\frac{|g(t-u)|^2}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi'(t)|g(t-u)|^2 dt
\end{aligned}$$

c) La transformée de Fourier à fenêtre d'une fonction de la forme considérée ici permet de retrouver la fréquence instantanée (c'est-à-dire ϕ') moyennée sur une fenêtre de même support

que $g(.-u)$. Si on est dans le cas précis où $f(t)=e^{i\phi(t)}$, on a donc intérêt à prendre une fenêtre à petit suport spatial (quitte à ce que son support fréquentiel soit large), de façon à reconstruire assez précisément ϕ'.
3. Dans ce cas, $|Sf(u,\xi)|=|Sf(u,-\xi)|$ (car $Sf(u,.)$ est la transformée de Fourier d'un signal réel) donc l'intégrale de gauche devient nulle (c'est l'intégrale d'une fonction impaire).

Exercice 2
1. La transformée de Fourier de $\tau\to f(u+\tau/2)$ est $\omega\to 2\hat{f}(2\omega)e^{2iu\omega}$. La transformée de Fourier de $\tau\to f(u-\tau/2)e^{i\tau\xi}$ est $\omega\to 2e^{2iu(\xi-\omega)}\hat{f}(2(\xi-\omega))$ (cela se vérifie par le calcul).
En utilisant l'égalité $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{h}_1\overline{\hat{h}_2}=\int_{\mathbb{R}}h_1\overline{h}_2$, on obtient :

$$\begin{aligned}P_Vf(u,\xi) &= \frac{4}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(2\omega)e^{2iu\omega}e^{-2iu(\xi-\omega)}\overline{\hat{f}(2(\xi-\omega))}d\omega\\ &= \frac{4}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(2\omega)\overline{\hat{f}(2(\xi-\omega))}e^{-2iu(\xi-2\omega)}d\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi+\gamma/2)\overline{\hat{f}(\xi-\gamma/2))}e^{iu\gamma}d\gamma\end{aligned}$$

La dernière égalité a été obtenue par un changement de variable $\gamma=2(2\omega-\xi)$.
2. a) Si $P_Vf(u,\xi)\neq 0$, alors il existe $\tau\in\mathbb{R}$ tel que $f(u+\tau/2)\overline{f(u-\tau/2)}\neq 0$. Posons $y_1=u+\tau/2$ et $y_2=u-\tau/2$. Puisque $f(y_1)$ et $f(y_2)$ sont non-nuls, $y_1,y_2\in[a;b]$.
Comme $u=\frac{y_1+y_2}{2}$, u appartient aussi à $[a;b]$.
b) C'est le même raisonnement que précédemment, appliqué à l'expression obtenue dans la question 1.
3. La fonction $\xi\to P_Vf(u,\xi)$ est la transformée de Fourier de la fonction $\tau\to f(u+\tau/2)\overline{f(u-\tau/2)}$. D'après la formule d'inversion de la transformée de Fourier :

$$|f(u)|^2=f(u+0/2)\overline{f(u-0/2)}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}P_Vf(u,\xi)d\xi$$

D'après la question 1., la fonction $u\to P_Vf(u,\xi)$ est la transformée de Fourier inverse de la fonction $\gamma\to\hat{f}(\xi+\gamma/2)\overline{\hat{f}(\xi-\gamma/2)}$. Donc $\int_{\mathbb{R}}P_Vf(u,\xi)du$ est la valeur de $\gamma\to\hat{f}(\xi+\gamma/2)\overline{\hat{f}(\xi-\gamma/2)}$ en $\gamma=0$:

$$\int_{\mathbb{R}}P_Vf(u,\xi)du=|\hat{f}(\xi)|^2$$

4. a) Posons $f_1(t)=g(t-u_1)e^{i\omega_1 t}$ et $f_2(t)=g(t-u_2)e^{i\omega_2 t}$. Alors P_Vf est la somme de quatre termes : P_Vf_1, P_Vf_2 et

$$\int_{\mathbb{R}}f_1\left(u+\frac{\tau}{2}\right)\overline{f_2\left(u-\frac{\tau}{2}\right)}e^{-i\tau\xi}d\tau \qquad \int_{\mathbb{R}}f_2\left(u+\frac{\tau}{2}\right)\overline{f_1\left(u-\frac{\tau}{2}\right)}e^{-i\tau\xi}d\tau$$

En faisant un changement de variable $\tau\leftrightarrow-\tau$, on voit que ces deux termes sont conjugués. Leur somme est donc deux fois la partie réelle du premier. Étudions donc seulement le premier :

$$\int_{\mathbb{R}}f_1\left(u+\frac{\tau}{2}\right)\overline{f_2\left(u-\frac{\tau}{2}\right)}e^{-i\tau\xi}d\tau=\int_{\mathbb{R}}g\left(u-u_1+\frac{\tau}{2}\right)\overline{g\left(u-u_2-\frac{\tau}{2}\right)}e^{i\left((\omega_1-\omega_2)u+\frac{(\omega_1+\omega_2)\tau}{2}\right)}e^{-i\tau\xi}d\tau$$

Pour que ce terme prenne des valeurs non-négligeables, il faut que $u \in [\frac{u_1+u_2}{2} - 1; \frac{u_1+u_2}{2} + 1$. En effet, sinon, on a $g(u-u_1+\tau/2)g(u-u_2-\tau/2) = 0$ pour tout τ. Puisque g est assez concentrée en basses fréquences, le produit $\tau \to g(u-u_1+\tau/2)\overline{g(u-u_2-\tau/2)}$ l'est aussi. À multiplication par $e^{i(\omega_1-\omega_2)u}$ près, le terme qu'on considère est la transformée de Fourier de cette fonction en $\xi - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$. Il faut donc avoir $\xi \approx \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ pour que ce terme ne soit pas négligeable.
Pour $u = \frac{u_1+u_2}{2}$ et $\xi = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, cette fonction vaut :

$$2e^{i(\omega_1-\omega_2)u} \int_{\mathbb{R}} g(\tau)\overline{g(-\tau)}d\tau$$

ce qui n'est pas a priori négligeable devant Pf_1 et Pf_2.
Par un raisonnement similaire, Pf_1 et Pf_2 sont concentrées en fréquences autour de (u_1, ω_1) et (u_2, ω_2).
Donc Pf est une somme de trois termes, localisés en temps-fréquence autour de (u_1, ω_1), (u_2, ω_2) et $\left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$.
b) Le terme d'interférence (la composante localisée en $\left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$) est indésirable. En effet, le signal f est nul autour du temps $\frac{u_1+u_2}{2}$ et sa transformée de Fourier est a priori négligeable autour de $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ (si ω_1 et ω_2 sont assez différentes). Ces valeurs n'ont donc pas d'interprétation physique simple.

5. a) Pour tout $u \notin U$, $0 = |f(u)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} P_V f(u,\xi)d\xi$. Puisque $P_V f(u,\xi) \geq 0$ pour tout ξ, on doit avoir $P_V f(u,\xi) = 0$ pour tout ξ.
b)

$$\begin{aligned}
P_V(af_1+bf_2) &= Q_V(af_1+bf_2, af_1+bf_2)\\
&= |a|^2 Q_V(f_1,f_1) + \overline{a}bQ_V(f_1,f_2) + a\overline{b}Q_V(f_2,f_1) + |b|^2 Q_v(f_2,f_2)\\
&= |a|^2 P_V(f_1) + 2\mathrm{Re}\,(\overline{a}bQ_V(f_1,f_2)) + |b|^2 P_V(f_2)
\end{aligned}$$

Pour tout $u \notin U_1 \cup U_2$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $P_V(af_1+bf_2)(u,\xi) = P_V(f_1)(u,\xi) = P_V(f_2)(u,\xi) = 0$ d'après la première question. On a donc, pour tous a, b, $\mathrm{Re}\,(\overline{a}bQ_V(f_1,f_2)(u,\xi)) = 0$. Puisque c'est vrai pour tous a, b, on doit avoir $Q_V(f_1,f_2)(u,\xi) = 0$.
Pour tout $u \in U_2$, on a, pour tout ξ :

$$0 \leq P_V(af_1+bf_2)(u,\xi) = 2\mathrm{Re}\,(\overline{a}bQ_V(f_1,f_2)(u,\xi)) + |b|^2 P_V(f_2)(u,\xi)$$

Si on prend b réel et qu'on le fait tendre vers 0, on obtient :

$$0 \leq 2b\mathrm{Re}\,(\overline{a}Q_V(f_1,f_2)(u,\xi)) + o(b)$$

On doit donc avoir $\mathrm{Re}\,(\overline{a}Q_V(f_1,f_2)(u,\xi)) = 0$ pour tout a et donc $Q_V(f_1,f_2)(u,\xi) = 0$.
De manière symétrique, $Q_V(f_1,f_2)(u,\xi) = 0$ pour tout ξ et tout $u \in U_1$. Donc $Q_V(f_1,f_2) = 0$.
c) D'après la question précédente, $P_V(f_1+f_2) = P_V(f_1) + P_V(f_2) + 2\mathrm{Re}(Q_V(f_1,f_2)) = P_V(f_1) + P_V(f_2)$.
Donc, pour tout ξ :

$$\begin{aligned}
|\widehat{(f_1+f_2)}(\xi)|^2 &= \int_{\mathbb{R}} P_V(f_1+f_2)(u,\xi)du\\
&= \int_{\mathbb{R}} P_V(f_1)(u,\xi)du + \int_{\mathbb{R}} P_V(f_2)(u,\xi)du\\
&= |\hat{f}_1|^2(\xi) + |\hat{f}_2|^2(\xi)
\end{aligned}$$

d) Puisque $|\widehat{(f_1+f_2)}(\xi)|^2 = |\hat{f}_1|^2(\xi) + |\hat{f}_2|^2(\xi) + 2\mathrm{Re}(\hat{f}_1(\xi)\overline{\hat{f}_2(\xi)})$, cela veut dire que, pour tout ξ, $\mathrm{Re}(\hat{f}_1(\xi)\overline{\hat{f}_2(\xi)}) = 0$.

Il n'est pas possible que toutes les fonctions de la classe de Schwarz à supports disjoints, f_1 et f_2, vérifient $\mathrm{Re}(\hat{f}_1(\xi)\overline{\hat{f}_2(\xi)}) = 0$. En effet, si c'était vrai, ce serait aussi le cas pour toutes les fonctions de L^1 à support disjoint (car l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^1) et il suffit de prendre $f_1 = 1_{[0;1]}$ et $f_2 = 1_{[2;3]}$ pour se convaincre que ce n'est pas vrai.

Exercice 3

1. $Sf(n\Delta u, m\Delta\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-n\Delta u)e^{-m\Delta\xi t}dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g_{n\Delta u, m\Delta\xi}(t)}dt$

Donc $Sf(n\Delta u, m\Delta\xi)$ est le produit scalaire (hermitien) de f et de $g_{n\Delta u,m\Delta\xi}$. Si $(g_{n\Delta u,m\Delta\xi})$ est une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$, on a donc :

$$\tilde{f} = \sum_{n,m} \langle g_{n\Delta u,m\Delta\xi}, f\rangle g_{n\Delta u,m\Delta\xi}$$

2. On peut prendre $\Delta u = 1, \Delta\xi = 2\pi$ et $g = 1_{[0;1]}$.

De manière similaire, on peut prendre $\hat{g} = 1_{[0,2\pi]}, \Delta u = 1, \Delta\xi = 2\pi$.

Aucun de ces deux exemples n'est très bon pour détecter les fréquences instantanées : le premier est bien localisé en temps mais mal en espace. Pour le deuxième, c'est l'inverse.

Exercice 4

1. D'après le cours :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} Sf(u',\xi')g(t-u')e^{i\xi' t}d\xi' du'$$

Donc, par définition de Sf :

$$\begin{aligned} Sf(u,\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u)e^{-i\xi t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(t-u)Sf(u',\xi')g(t-u')e^{i(\xi'-\xi)t}d\xi' du' dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} Sf(u',\xi')K(u,\xi,u',\xi')du'd\xi' \end{aligned}$$

si on pose $K(u,\xi,u',\xi') = \int_{\mathbb{R}} g(t-u)g(t-u')e^{i(\xi'-\xi)t}dt$.

2. a) D'après l'égalité $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |Sf(u,\xi)|^2 dud\xi$ qui se trouve dans le cours, si f est dans L^2, alors Sf aussi.

b) D'après la définition de K, $P(Sf) = Sf$ pour toute f. Donc $P = \mathrm{Id}$ sur V.

Il suffit donc de montrer $P = 0$ sur l'orthogonal de V. Il faut donc montrer que $P(h) = 0$ pour toute $h \in L^2(\mathbb{R}^2)$ telle que $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \overline{Sf(u,\xi)}h(u,\xi)dud\xi$ pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$. Supposons une telle h fixé.

Pour tout u et pour tout ξ, $K(u,\xi,.,.) = \overline{S(g(.-u)e^{i\xi t})}$ donc :

$$Ph(u,\xi) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \overline{S(g(.-u)e^{i\xi t})}(u',\xi')h(u',\xi')du'd\xi' = 0$$

Exercice 5

1. Soit $V = \{(P(n-N), ..., P(n+N))$ tq P est un polynôme de degré $d\}$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2N+1}$.
Pour que la quantité voulue soit minimale, il faut et suffit que $(P_n(n-N), ..., P_n(n+N))$ soit égal à x, où x est la projection orthogonale de $(X[n-N], ..., X[n+N])$ sur V.
Il n'existe qu'un seul P_n tel que $(P_n(n-N), ..., P_n(n+N)) = x$ car $2N+1$ valeurs d'un polynôme de degré $d < 2N+1$ déterminent uniquement le polynôme.
Donc P_n est bien défini.

2. L'espace V défini à la question précédente ne dépend pas de n. Notons L la projection orthogonale sur V. C'est une application linéaire.
Soit $f : V \to \mathbb{R}_d[X]$ l'application qui à un élément $x = (x_{-N}, ..., x_N)$ de V associe le polynôme $f(x)$ de degré d tel que $f(x)(i) = x_i$ pour tout $i \in \{-N, ..., N\}$.
Alors, d'après le raisonnement de la question précédente, $P_n(r) = f(L(X[n-N], ..., X[n+N]))(r-n)$.
Notons $D^{(i)}$ la dérivation d'ordre i. On a :

$$Y_{N,d}^{(i)}[n] = D^{(i)} \circ f \circ L(X[n-N], ..., X[n+N])(0)$$

Les applications $D^{(i)}, f, L$ sont linéaires. Il existe donc $\alpha_{-N}, ..., \alpha_N$ (dépendant de N et d) telles que, pour tout n :

$$Y_{N,d}^{(i)}[n] = \alpha_{-N}X[n-N] + ... + \alpha_N X[n+N]$$

Si on pose $h_{N,d}^{(i)}$ le filtre tel que $h_{N,d}^{(i)}[k] = \alpha_{-k}$ si $|k| \leq N$ et 0 sinon, on a $Y_{N,d}^{(i)}[n] = h_{N,d}^{(i)} \star X[n]$ pour tout n.