Feuille d'exercices n°5

Dans tout le TD, ψ désignera une fonction telle que $\hat{\psi}(\omega) = 0$. On posera :

$$\psi_s(x) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{x}{s}\right) \qquad \text{et, pour toute fonction } f, \quad Wf(u,s) = \langle f, \psi_s(.-u)\rangle$$

On appellera Wf la transformée en ondelettes de f.

Exercice 1
Soit $T > 0$. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $h(t) = 0$ pour tout $t \notin [0;T]$. On pose :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(t - nT)$$

1. Calculer la transformée de Fourier de f. [Indication : appliquer la formule de Poisson.]

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction « fenêtre ». On définit la transformée de Fourier à fenêtre de f par :

$$Sf(u,\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u)e^{-i\xi t}dt$$

a) Calculer Sf en fonction de $\hat{g}$ et $\hat{h}$.
b) Quelle doit être, au maximum, la taille caractéristique du support de $\hat{g}$ pour que le graphe de Sf présente des « bandes » ?
c) Par exemple, on prend g gaussienne : $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}A}e^{-t^2/(2A^2)}$. [On rappelle qu'on a alors $\hat{g}(\omega) = \exp(-A^2\omega^2/2)$.]
Quel est le bon ordre de grandeur pour A ? Quel est alors la taille caractéristique du support de g ?

3. Soit ψ une ondelette. Pour toute fonction g, on note Wg la transformée en ondelettes de g.
a) Calculer Wg pour $g(t) = \exp(i\alpha t)$.
b) Calculer Wf. [Indication : justifier et utiliser l'égalité $f(t) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{h}\left(\frac{2\pi}{T}k\right)\exp\left(i\frac{2k\pi}{T}t\right)$.]
c) On suppose que $\hat{\psi}$ est négligeable en-dehors de l'intervalle $[1-a; 1+a]$ avec $a \in]0;1[$. Montrer que, si a est assez petit, on observe des « bandes » sur le graphe de $|Wf|$. Calculer le nombre de bandes en fonction de a.

Exercice 2 : fréquence instantanée et transformée en ondelettes
On suppose que ψ est une ondelette à support compact inclus dans $[-1;1]$, telle que $\hat{\psi}(\omega)$ est négligeable pour $\omega < 0$.
Soit f une fonction de la forme $f(t) = a(t)\cos(\phi(t))$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. a) On suppose que les variations de a et ϕ' sont négligeables sur $[x_0 - s, x_0 + s]$. Donner la valeur approximative de $Wf(x_0, s)$ en fonction de $\hat{\psi}$.
b) En déduire une manière de retrouver ϕ' à partir de Wf.

2. Si maintenant, on a $f(t) = \cos(\phi_1(t)) + \cos(\phi_2(t))$, à quelle condition peut-on déterminer (approximativement) à la fois ϕ_1' et ϕ_2' à partir de Wf ?
On supposera que la condition de la question 1.a) est vérifiée et que $\hat{\psi}(\omega)$ est négligeable en-dehors d'un intervalle de la forme $[\beta_1; \beta_2]$ avec $0 < \beta_1 < \beta_2$.

Exercice 3 : détection de contours
Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une ondelette appartenant à la classe de Schwartz (vérifiant $\hat{\psi}(0) = 0$).
On pose :

$$C = \int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)|dx$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 1-lipschitzienne. Montrer que, pour tous u et s, $|Wf(u,s)| \leq Cs^{3/2}$.

2. a) Montrer qu'il existe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\psi = \phi'$ et $\phi(x) \to 0$ quand $|x| \to \pm\infty$.
b) Soit $a \in \mathbb{R}$. On prend $f = 1_{[a;+\infty]}$. Calculer Wf en fonction de ϕ.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. On suppose que les points de discontinuités sont en nombre fini : $x_1 < ... < x_n$.
Pour tout $k \leq n$, on note $\alpha_k = f(x_k^+) - f(x_k^-)$. On suppose que f est 1-lipschitzienne sur les intervalles ne contenant aucun x_k.
Dessiner l'allure de $Wf(.,s)$ pour s assez petit.

Exercice 4 : inverse de la transformée en ondelettes
Soient $f, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartenant à la classe de Schwarz, avec $\hat{\psi}(0) = 0$. On pose :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_s(t-u) Wf(u,s)\, du\, \frac{dt}{s^2}$$

Montrer que $F = C_\psi f$, où C_ψ est une constante qui dépend de ψ mais pas de f.
[Indication : remarquer que $F(t) = \int_0^{+\infty} (\psi_s \star Wf(.,s))(t) \frac{dt}{s^2}$.]

Exercice 5 : approximations multirésolution
Soit $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On dit que $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ est une approximation multirésolution si elle vérifie les propriétés suivantes :
- $\forall j,k \in \mathbb{Z}, (f \in V_j) \Leftrightarrow (f(.-2^j k) \in V_j)$
- $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j-1}$
- $\forall j \in \mathbb{Z}, (f \in V_{j-1}) \Leftrightarrow (f(./2) \in V_j)$
- $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
- $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$
- Il existe θ tel que $\{\theta(.-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base de Riesz de V_0.

[On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base de Riesz d'un espace de Hilbert E si $\overline{\mathrm{Vect}\,\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = E$ et s'il existe $c, C > 0$ telles que, pour toute suite $(a_n) \in l^2(\mathbb{Z})$, $c||a||_{l^2} \leq \left|\left|\sum_n a_n f_n\right|\right|_E \leq C||a||_{l^2}$.]

On étudie ici le cas où, pour tout j, V_j est l'ensemble des fonctions de L^2 qui sont constantes sur tous les intervalles de la forme $[2^j k; 2^j(k+1)[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que les $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ forment une approximation multirésolution.

2. Montrer qu'on peut choisir θ de sorte que $\{\theta(.-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée de V_0.

3. Pour tout j, on note W_j l'orthogonal de V_j dans V_{j-1}. Montrer que $\overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j} = L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

[Vous pouvez donner de ce résultat une démonstration générale, indépendante de la définition des V_j.]

4. a) Montrer qu'il existe $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tel que, pour tout j, $\{\frac{1}{\sqrt{2^j}}\psi(2^{-j}t - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_j.
b) Déduire des questions 3. et 4.a) que $\{\frac{1}{\sqrt{2^j}}\psi(2^{-j}t - n)\}_{j,n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.