Feuille d'exercices n°5
Corrigé

Exercice 1

1. On utilise le fait que la transformée de Fourier du peigne de Dirac $c(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT}(t)$ vaut :

$$\hat{c}(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{2k\pi/T}(\omega)$$

Puisque $f = h \star c$, $\hat{f} = \hat{h}\hat{c}$:

$$\hat{f} = \frac{2\pi}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{h}\left(\frac{2\pi}{T}k\right)\delta_{2k\pi/T}$$

2. a) $Sf(u,.)$ est la transformée de Fourier de $t \to f(t)g(t-u)$. Elle vaut donc $\frac{1}{2\pi}\hat{f} \star \widehat{g(.-u)}$.
D'après la question 1., on a alors $Sf(u,\xi) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{h}\left(\frac{2\pi}{T}k\right)\widehat{g(.-u)}(\xi - 2k\pi/T)$.
Puisque $\widehat{g(.-u)}(\xi) = e^{-i\xi u}\hat{g}(\xi)$, cela donne :

$$Sf(u,\xi) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-iu\left(\xi-\frac{2k\pi}{T}\right)}\hat{h}\left(\frac{2\pi}{T}k\right)\hat{g}\left(\xi - \frac{2k\pi}{T}\right)$$

b) Pour qu'on observe des bandes, il faut que les fonctions $\hat{g}\left(\xi - \frac{2k\pi}{T}\right)$ soient à peu près à support disjoints. Il faut donc que le support de $\hat{g}$ soit de taille caractéristique au plus $\frac{2\pi}{T}$.
c) Il faut que $|\hat{g}|$ soit très petite en-dehors d'un intervalle de taille $\frac{2\pi}{T}$. Puisque $\hat{g}(\omega) = \exp(-A^2\omega^2/2)$, $\hat{g}(\omega)$ est négligeable pour $A^2\omega^2/2$ significativement plus grand que 1, disons pour $A^2\omega^2/2 \geq 5$.
L'intervalle sur lequel $\hat{g}$ n'est pas négligeable est donc environ $\left[-\frac{\sqrt{10}}{A}; \frac{\sqrt{10}}{A}\right]$.
Il faut donc avoir $2\frac{\sqrt{10}}{A} \leq \frac{2\pi}{T}$, soit $A \geq \frac{\sqrt{10}T}{\pi}(\approx T)$.
La fonction g, par le même raisonnement, prend des valeurs non-négligeables sur à peu près $\left[-\sqrt{10}A; \sqrt{10}A\right]$, c'est-à-dire sur un intervalle de taille environ $2\sqrt{10}A$. Si on prend $A \approx \frac{\sqrt{10}T}{\pi}$, le support caractéristique de g en temps est d'ordre $\frac{20T}{\pi} \approx 6T$.
[Ce résultat indique que, pour qu'on puisse discerner les bandes de fréquence dans la transformée de Fourier à fenêtre, il faut que la fenêtre recouvre plusieurs périodes de la fonction f. C'est assez logique : il faut « voir » plusieurs périodes à la fois pour pouvoir déterminer le comportement fréquentiel de f, qui est déterminé par la période.]

3. a) Calculons $\langle g, \psi_s(.-u)\rangle$ pour tout s.

$$
\begin{aligned}
\langle g, \psi_s(. - u)\rangle &= \frac{1}{2\pi}\langle \hat{g}, \widehat{\psi_s(. - u)}\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\langle 2\pi\delta_\alpha, \sqrt{s}e^{-iu.}\hat{\psi}_s(s.)\rangle \\
&= \sqrt{s}e^{iu\alpha}\overline{\hat{\psi}_s(s\alpha)}
\end{aligned}
$$

b) L'égalité peut se calculer directement à partir de l'expression de f. On peut aussi la déduire de la question 1. en appliquant la transformée de Fourier inverse.
Puisque la transformée en ondelettes est linéaire :

$$
\begin{aligned}
Wf(u,s) &= \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{h}\left(\frac{2\pi}{T}k\right)W\left(\exp\left(i\frac{2k\pi}{T}.\right)\right)(u,x) \\
&= \frac{\sqrt{s}}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{h}\left(\frac{2\pi}{T}k\right)\overline{\hat{\psi}\left(s\frac{2k\pi}{T}\right)}\exp\left(i\frac{2k\pi}{T}u\right)
\end{aligned}
$$

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\hat{\psi}\left(s\frac{2k\pi}{T}\right)$ est non-négligeable sur l'intervalle $\left[\frac{(1-a)T}{2k\pi}; \frac{(1+a)T}{2k\pi}\right]$.
Si $\frac{(1+a)T}{2k\pi} < \frac{(1-a)T}{2(k-1)\pi}$ et $\frac{(1-a)T}{2k\pi} > \frac{(1+a)T}{2(k+1)\pi}$, alors $|Wf(u,s)| \approx \frac{\sqrt{s}}{T}\left|\hat{h}\left(\frac{2\pi}{T}k\right)\overline{\hat{\psi}\left(s\frac{2k\pi}{T}\right)}\right|$ sur l'intervalle $\left[\frac{(1-a)T}{2k\pi}; \frac{(1+a)T}{2k\pi}\right]$. Ce terme ne dépend pas de u : c'est une « bande » horizontale dans le graphe de $|Wf|$.
On vérifie que les conditions $\frac{(1+a)T}{2k\pi} < \frac{(1-a)T}{2(k-1)\pi}$ et $\frac{(1-a)T}{2k\pi} > \frac{(1+a)T}{2(k+1)\pi}$ sont équivalentes à :

$$
k < \frac{1-a}{2a}
$$

Le nombre de bandes qu'on observe est donc $2\lfloor\frac{1-a}{2a}\rfloor \approx \frac{1}{a} - 1$. (Le facteur 2 est là pour tenir compte aussi des bandes correspondant à $k < 0$.)

Exercice 2

1. a) $Wf(x_0,s) = \langle f, \psi_s(. - x_0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{s}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi((x-x_0)/s)}dx = \frac{1}{\sqrt{s}}\int_{\mathbb{R}} f(x+x_0)\overline{\psi(x/s)}dx$
$\psi(x/s) = 0$ si $x \notin [-s; s]$. Puisque a et ϕ' sont quasiment constantes sur $[x_0 - s; x_0 + s]$, on a, pour tout $x \in [-s; s]$:

$$
f(x_0 + x) \approx a(x_0)\cos(\phi(x_0) + x\phi'(x_0)) = a(x_0)\left(e^{i(\phi(x_0)+x\phi'(x_0))} + e^{-i(\phi(x_0)+x\phi'(x_0))}\right)
$$

On a donc :

$$
\begin{aligned}
Wf(x_0,s) &\approx \frac{a(x_0)}{\sqrt{s}}\left(e^{i\phi(x_0)}\int_{\mathbb{R}}\overline{\psi(x/s)}e^{ix\phi'(x_0)}dx + e^{-i\phi(x_0)}\int_{\mathbb{R}}\overline{\psi(x/s)}e^{-ix\phi'(x_0)}dx\right) \\
&= \sqrt{s}a(x_0)\left(e^{i\phi(x_0)}\overline{\hat{\psi}(s\phi'(x_0))} + e^{-i\phi(x_0)}\overline{\hat{\psi}(-s\phi'(x_0))}\right)
\end{aligned}
$$

b) D'après 1., $\frac{1}{\sqrt{s}}|Wf(x_0,.)|$ admet des maxima locaux en $s = \pm\frac{m}{\phi'(x_0)}$, pour tous les m tels que m est un maximum local de $\hat{\psi}(\omega)$ (à condition que a et ϕ' soient quasi-constantes sur l'intervalle $\left[x_0 - \left|\frac{m}{\phi'(x_0)}\right|; x_0 + \left|\frac{m}{\phi'(x_0)}\right|\right]$).

Il « suffit » donc de calculer les maxima locaux de $\frac{1}{\sqrt{s}}|Wf(x_0,.)|$ pour retrouver les fréquences instantanées.
2. Supposons que $\phi_1', \phi_2' > 0$ autour de x_0 (quitte à remplacer ϕ_1 et/ou ϕ_2 par leur opposé, c'est possible ; on néglige pour simplifier le cas où l'une des deux fréquences est nulle).
D'après la question 1., on a :

$$\frac{1}{\sqrt{s}}Wf(x_0,s) \approx \left(e^{i\phi_1(x_0)}\overline{\hat{\psi}(s\phi_1'(x_0))} + e^{i\phi_2(x_0)}\overline{\hat{\psi}(s\phi_2'(x_0))}\right)$$

Le premier terme est non-négligeable sur $\left[\frac{\beta_1}{\phi_1'(x_0)}; \frac{\beta_2}{\phi_1'(x_0)}\right]$ et le deuxième sur $\left[\frac{\beta_1}{\phi_2'(x_0)}; \frac{\beta_2}{\phi_2'(x_0)}\right]$. Pour qu'on puisse appliquer la même méthode qu'à la question 1.b), il faut que ces deux intervalles ne s'intersectent pas.
Par exemple, si on suppose $\phi_1'(x_0) > \phi_2'(x_0)$, il faut avoir :

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} < \frac{\phi_1'(x_0)}{\phi_2'(x_0)}$$

Exercice 3

1.

$$\begin{aligned}
|Wf(u,s)| &= \langle f, \psi_s(.-u)\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{s}}\left|\int_{\mathbb{R}} f(u+x)\overline{\psi(x/s)}dx\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{s}}\left|\int_{\mathbb{R}} \left(f(u+x)-f(u)\right)\overline{\psi(x/s)}dx\right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{s}}\int_{\mathbb{R}} |x||\psi(x/s)|dx \\
&= s^{3/2}\int_{\mathbb{R}} |x||\psi(x)|dx \\
&= Cs^{3/2}
\end{aligned}$$

2. a) On pose $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt$. On a bien $\psi = \phi'$, $\phi(x) \to 0$ en $-\infty$ et $\phi(x) \to \int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = \hat{\psi}(0) = 0$ quand $x \to +\infty$.
b)

$$\begin{aligned}
Wf(u,s) &= \frac{1}{\sqrt{s}}\int_a^{+\infty} \overline{\psi((x-u)/s)}dx \\
&= \sqrt{s}\int_{(a-u)/s}^{+\infty} \overline{\psi(x)}dx \\
&= \sqrt{s}\overline{\int_{(a-u)/s}^{+\infty} \phi'(x)dx} \\
&= -\sqrt{s}\ \overline{\phi((a-u)/s)}
\end{aligned}$$

3. Soit $g(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k 1_{[x_k;+\infty]}(x)$. La fonction g est discontinue aux mêmes points que g, avec les mêmes amplitudes de sauts.
La fonction $h = f - g$ est donc continue. De plus, elle est 1-lipschitzienne sur chaque intervalle ne contenant aucun x_k. Comme h est continue, elle est globalement 1-lipschitzienne.
Puisque $f = h + g$, on a, d'après les questions 1. et 2.b) :

$$Wf(u,s) = -\sqrt{s}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\phi((x_k - u)/s)} + Wh(u,s)$$

avec $|Wh(u,x)| \leq Cs^{3/2}$.
La fonction $Wf(.,s)$ présentera donc des sortes de pics au voisinage des x_k, de largeur proportionnelle à s. Entre les pics, $|Wf(.,s)|$ sera de l'ordre de $s^{3/2}$.
L'amplitude du pic situé en α_k sera à peu près $\sqrt{s}|\alpha_k| \max \phi$ et donc détectable à partir du moment où $\sqrt{s}|\alpha_k| \max \phi \gg Cs^{3/2}$, soit $s \ll |\alpha_k|(\max \phi)/C$.

Exercice 4
Par définition de la convolution, on a $F(t) = \int_0^{+\infty} (\psi_s \star Wf(.,s))(t) \frac{dt}{s^2}$.
De plus, $Wf(u,s) = \langle f, \psi_s(. - u)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\psi_s(t-u)}dt = f \star \overline{\psi_s(-.)}(u)$.
Donc $\psi_s \star Wf(.,s)(t) = \psi_s \star \overline{\psi_s(-.)} \star f(t)$. D'après la formule d'inversion de Fourier (et le fait que la transformée de Fourier transforme les convolutions en produits, et le fait que $\widehat{\overline{\psi_s(-.)}} = \overline{\hat{\psi}_s}$) :

$$\psi_s \star Wf(.,s)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}_s(\omega)|^2 \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{s}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(s\omega)|^2 \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

En intégrant sur s :

$$\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(s\omega)|^2 \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega\frac{ds}{s} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(s\omega)|^2\frac{ds}{s}\right)\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(s)|^2\frac{ds}{s}\right)\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{C_\psi}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\
&= C_\psi f(t)
\end{aligned}$$

Pour passer de la deuxième à la troisième ligne, on a fait un changement de variable $s \to s|\omega|$ et utilisé le fait que, comme ψ est réelle, $|\hat{\psi}(\xi)| = |\hat{\psi}(-\xi)|$.
On a posé $C_\psi = \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(s)|^2 \frac{ds}{s}$.

Exercice 5
1. Les trois premières propriétés sont relativement simples.
Pour la quatrième : une fonction de L^2 qui appartiendrait à tous les V_j serait constante sur $[0;2^j[$ et sur $[-2^j;0[$, pour tout j. En faisant tendre j vers $+\infty$, on voit qu'elle est constante sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$. Pour être de carré intégrable, elle doit être nulle.

Pour la cinquième propriété : toute fonction continue à support compact peut être approximée uniformément (et dans L^2) par des fonctions de $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$. L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^2.
On prend $\theta = 1_{[0;1]}$. Si $f \in V_0$, on a $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\theta(.-n)$. Donc l'espace vectoriel engendré par $\{\theta(.-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans V_0.
On vérifie facilement que $\{\theta(.-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée. C'est donc en particulier une base de Riesz pour $c = C = 1$.

2. On l'a vu à la question précédente.

3. Les W_j sont orthogonaux deux à deux. En effet, si $j_1 < j_2$, $W_{j_2} \subset V_{j_2-1} \subset V_{j_1} \perp W_{j_1}$. La somme est donc bien directe.
D'après la cinquième propriété, il suffit de montrer que, pour tout k, $V_k \subset \overline{\bigoplus\limits_{j\in\mathbb{Z}} W_j}$.

Soit $f \in V_k$ quelconque.

On remarque que, pour tout $l > k$, on a $V_k = V_l \overset{\perp}{\oplus} W_l \overset{\perp}{\oplus} ... \overset{\perp}{\oplus} W_{k+1}$.
On peut donc écrire $f = f_l + g_l + ... + g_{k+1}$ où les g_s sont les projections orthogonales de f sur les W_s et f_l est la projection orthogonale de f sur V_l. Il suffit de montrer que $||f_l||_2 \to 0$ pour montrer que $f \in \overline{\bigoplus\limits_{j\in\mathbb{Z}} W_j}$.

Pour tout $l' > l$, $f_{l'} = f_l + g_{l+1} + ... + g_{l'}$ donc $||f_{l'} - f_l||_2 = \sqrt{\sum\limits_{s=l+1}^{l'} ||g_s||_2^2}$.
Puisque $\sum\limits_{s>k} ||g_s||_2^2 \leq ||f||_2^2 < +\infty$ (en effet, pour tout l, $||f||^2 = ||f_l||^2 + ||g_l||^2 + ... + ||g_{k+1}||^2$, par Pythagore), la suite $(f_l)_{l>k}$ est de Cauchy. Elle converge donc quand $l \to +\infty$. La limite appartient à tous les V_j (car, pour tout j, elle est limite d'une suite d'éléments de V_j ; en effet, $f_l \in V_j$ pour tout $l > j$). Elle est donc nulle : $||f_l||_2 \to 0$.

4. a) On vérifie que, pour tout j, W_j est l'ensemble des fonctions qui sont constantes sur chaque intervalle $[2^{j-1}k; 2^{j-1}(k+1)[$ telles que, pour tout k, $f(2^{j-1}.(2k)) = -f(2^{j-1}.(2k+1))$.
Une base (orthonormale) de W_j est donc donnée par :

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2^j}}\left(1_{[2^{j-1}.(2k);2^{j-1}.(2k+1)[} - 1_{[2^{j-1}.(2k+1);2^{j-1}.(2k+2)[}\right)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

Si on pose $\psi = 1_{[0;1/2[} - 1_{[1/2;1[}$, cette base est exactement de la forme voulue.
b) Les fonctions de la base sont orthonormales entre elles (car les W_j sont orthogonaux entre eux) et l'adhérence de l'espace vectoriel qu'elles engendrent est $\overline{\bigoplus\limits_{j\in\mathbb{Z}} W_j} = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.