Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$8

Exercice 1

Montrer que la famille des sinus discrets :

$$s_k[n] = \lambda_k \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{k\pi}{N}(n+1/2)\right) \qquad (k = 1, ..., N,\ n = 0, ..., N-1)$$

avec $\lambda_k = 1$ si $k < N$ et $1/\sqrt{2}$ si $k = N$, est une base orthonormale de $\mathbb{R}^N$.
Expliquer pourquoi, en traitement du signal, on lui préfère la base des cosinus discrets.

Exercice 2

On suppose que $(g_m)_{0 \leq m < N}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$ et qu'on dispose d'un algorithme rapide pour calculer la décomposition dans cette base de tout signal fini $x[n], 0 \leq n < N$. On désigne par $C(N)$ le temps de calcul de cet algorithme et on suppose que $C(N) \ll N^2$.
À partir de $(g_m)_{0 \leq m < N}$, déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^{N \times N}$ et un algorithme rapide calculant la décomposition d'un signal sur cette base. Exprimer la complexité de cet algorithme en fonction de C.

Exercice 3 : choix de la base du codage par transformée

On code un signal X en le décomposant sur une base orthonormale $(g_n)_{1 \leq n \leq N}$:

$$X = \sum_n \langle X, g_n \rangle g_n$$

On pose $A_n = \langle X, g_n \rangle$ et on quantifie puis on encode chaque A_n.
Dans cet exercice, on s'intéresse à la façon de choisir les g_n.

1. En utilisant les résultats du cours, montrer que pour minimiser le nombre de bits nécessaires pour le codage à taux de distorsion fixée, il faut minimiser l'entropie différentielle moyenne :

$$\overline{H}_d = \frac{1}{N}\left(H_d(A_1) + ... + H_d(A_N)\right)$$

2. On étudie le cas des processus gaussiens : on suppose que $X = (X_1, ..., X_N)$ est un vecteur gaussien dont on note K la matrice de covariance.
a) On admet que l'entropie d'une variable aléatoire gaussienne centrée de variance 1 est $\log_2 \sqrt{2\pi e}$. Calculer l'entropie d'une variable aléatoire gaussienne de variance σ^2.
b) Pour tout n, on note σ_n^2 la variance de A_n. Exprimer $\overline{H}_d$ en fonction des σ_n.
c) Montrer que $(g_n)_{n \leq N}$ minimise l'entropie différentielle moyenne si et seulement si c'est une base de vecteurs propres de K.
[Indication : Vérifier que $\sigma_n^2 = \langle g_n, K g_n \rangle$ puis utiliser la question 3.]

3. Montrer que si ϕ est une fonction strictement concave, alors $\sum_{n \leq N} \phi(\langle g_n, K g_n \rangle)$ est minimale si et seulement si les (g_n) forment une base de vecteurs propres de K.

Exercice 4

Soit $D = D_1 + ... + D_N$ la distorsion totale d'un code par transformée (c'est-à-dire où on décompose d'abord le signal sur une base orthonormale, puis on quantifie et on encode la valeur de chaque coordonnée).

Soit $R = R_1 + ... + R_N$ le débit moyen.

On suppose que, pour tout n, D_n est une fonction strictement convexe du débit.

1. Montrer qu'il existe une unique allocation $R_1, ..., R_N$ qui minimise D à R fixé et que $D'_n(R_n)$ est indépendant de n (en faisant comme si les R_k pouvaient prendre toutes les valeurs réelles).

2. Utiliser ce résultat pour redémontrer un théorème du cours : si on code chaque coordonnnée au moyen d'une quantification uniforme puis d'un codage entropique, la méthode de codage optimale est celle pour laquelle toutes les distorsions sont égales.

3. Afin d'imposer que R_n soit un entier positif, on utilise un algorithme itératif : soit $R_{n,p}$ le nombre de bits alloués à la composante n après p itérations, i.e. $\sum\limits_{n=1}^{N} R_{n,p} = p$. On alloue le $p+1$-ème bit à la composante k telle que :

$$|D'_k(R_{k,p})| = \max_m |D'_m(R_{m,p})|$$

Montrer que $R_{n,R}$ est l'allocation optimale si $D_n(k+1) - D_n(k) \approx D'_n(k)$.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire de loi $p(x)$.

1. On considère le quantificateur Q non-uniforme optimal sur K niveaux. On admettra ici que, dans l'approximation haute résolution, la distorsion associée est :

$$D \sim \frac{1}{12K^2} \left(\int p(x)^{1/3} dx \right)^3$$

[Pour la démonstration, voir l'exercice 2 du TD précédent.]

a) On suppose que X est gaussienne, centrée, de variance σ^2, et qu'on a $K = 2^R$ (et on code chaque valeur quantifiée de X sur R bits). Montrer que la distorsion du quantificateur Q est à peu près :

$$D \sim C\sigma^2 2^{-2R}$$

où C est une constante qu'on calculera.

b) Comparer cette approche avec un quantificateur uniforme suivi d'un codage entropique (c'est-à-dire pour lequel le nombre de bits moyen est égal à l'entropie).

2. On code maintenant un vecteur aléatoire $(A[1], ..., A[N])$ gaussien. On note σ_i^2 la variance de $A[i]$.

On quantifie chaque coordonnée $A[i]$ séparément et on envoie le code de chaque composante quantifiée. Pour chaque i, on note R_i le nombre moyen de bits nécessaire pour le codage, après quantification.

a) On suppose que le nombre moyen de bits $\overline{R} = (R_1 + ... + R_N)/N$ est fixé. Trouver la répartition qui minimise la distorsion globale $D = D_1 + ... + D_N$.

b) Comparer au cas où le nombre de bits est constant : $R_1 = ... = R_N$.