

Feuille d'exercices n°9

Exercice 1 : matching pursuit

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ une matrice sans colonne nulle et $b \in \mathbb{R}^p$ un vecteur. On cherche à résoudre le problème suivant (en supposant qu'il a une solution) :

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } Ax = b$$

et x a le plus possible de coordonnées nulles

On note $A_1, \dots, A_n$ les colonnes de A .

Dans cet exercice, on définit une méthode itérative pour trouver une approximation de x :

- On pose $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $r^{(0)} = b$.
- Pour tout k , si $x^{(k)}$ et $r^{(k)}$ sont définis, on définit $x^{(k+1)}$ et $r^{(k+1)}$ de la manière suivante :

$$\text{on choisit } i \text{ tel que } \left| \frac{\langle A_i, r^{(k)} \rangle}{\|A_i\|_2} \right| = \max_{j \leq n} \left| \frac{\langle A_j, r^{(k)} \rangle}{\|A_j\|_2} \right|$$

$$\text{on pose } x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{\langle A_i, r^{(k)} \rangle}{\|A_i\|_2^2} e_i$$

$$\text{on pose } r^{(k+1)} = r^{(k)} - \frac{\langle A_i, r^{(k)} \rangle}{\|A_i\|_2^2} A_i$$

1. Montrer que, pour tout k , $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0; 1[$ (dépendant de A) tel que, pour tout $y \in \text{Vect}\{A_1, \dots, A_n\}$, $\max_{j \leq n} \left| \frac{\langle y, A_j \rangle}{\|A_j\|_2} \right| \geq \alpha \|y\|_2$.
3. On suppose que $b \in \text{Vect}\{A_1, \dots, A_n\}$. Montrer que, pour tout k , $\|r^{(k)}\|_2 \leq (1 - \alpha^2)^{k/2} \|b\|_2$.

Exercice 2 : processus stationnaire à mémoire finie

Soit $X[n]$ un processus à valeurs réelles, du second ordre (c'est-à-dire tel que $\mathbb{E}(X[n]^2) < +\infty$) et stationnaire au sens large. On dit que $X[n]$ est à mémoire finie si, pour un certain $N > 0$, $R_X[k] = 0$ pour $|k| > N$.

1. Montrer que si X est à mémoire finie, sa puissance spectrale est de la forme :

$$\hat{R}_X(e^{i\omega}) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n (e^{in\omega} + e^{-in\omega})$$

où les a_n sont des nombres réels.

2. Soit $B[n]$ un bruit blanc de variance 1 et $h[n]$ un filtre causal à réponse impulsionnelle finie, i.e. tel que $h[n] = 0$ si $n > N$ ou $n < 0$. On définit $X = h \star B$. Montrer que X est un processus à mémoire finie.

3. Soit F une fonction de la forme :

$$F(e^{i\omega}) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n (e^{in\omega} + e^{-in\omega})$$

où les a_n sont des nombres réels et où $F(e^{i\omega}) \geq 0$ pour tout $\omega \in [-\pi; \pi]$. On supposera $a_N \neq 0$.

On lui associe le polynôme P tel que $P(z) = z^N (a_0 + \sum_{n=1}^N a_n (z^n + z^{-n}))$.

Exprimer $F(e^{i\omega})$ en fonction de $P(e^{-i\omega})$.

4. Montrer que $P(z^{-1}) = z^{-2N} P(z)$. En déduire que P peut s'écrire sous la forme :

$$P(z) = a_N \prod_{i=1}^N (z - z_i) \prod_{i=1}^N (z - z_i^{-1*})$$

5. Montrer que :

$$-z_i^{*-1} |e^{-i\omega} - z_i|^2 = e^{i\omega} (e^{-i\omega} - z_i) (e^{-i\omega} - z_i^{*-1})$$

En déduire qu'il existe un polynôme $Q(z) = \sum_{n=0}^N h_n z^n$ à coefficients h_n réels tel que pour tout $\omega \in [-\pi; \pi]$, on ait $F(e^{i\omega}) = |Q(e^{-i\omega})|^2$.

6. Montrer que tout processus stationnaire à mémoire finie peut être obtenu en filtrant un bruit blanc B par un filtre causal à réponse impulsionnelle finie.

Exercice 3 : théorème du codage de source de Shannon

Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs. On note A l'ensemble des valeurs possibles et H l'entropie de X .

On note $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que X . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, on note :

$$p(a) = \mathbb{P}(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n)$$

Soit $q \in]0; 1[$. Pour tout n , on note $E_{n,q}$ un sous-ensemble de A^n de la plus petite taille possible telle que $\sum_{a \in E_{n,q}} p(a) \geq q$.

1. Soient $\delta, \epsilon > 0$. Montrer que, pour tout n assez grand, il existe une partition de A^n en deux ensembles B_1 et B_2 tels que :

$$\sum_{a \in B_1} p(a) \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \forall a \in B_2, \left| \frac{\log_2(1/p(a))}{n} - H \right| \leq \delta$$

2. En déduire que, quel que soit $\eta > 0$, $\frac{\log_2(\text{Card}(E_{n,q}))}{n} > H - \eta$ pour tout n assez grand.

3. Supposons que, pour tout n , il existe une fonction C_n injective, de A^n vers l'ensemble des suites finies de 0 et de 1. Pour tous $n \in \mathbb{N}, a \in A^n$, on note $l_n(a)$ la longueur de $C_n(a)$.

Montrer que, pour tout $\eta > 0$:

$$\sum_{a \in A^n} p(a) \frac{l_n(a)}{n} \geq H - \eta$$

dès que n est assez grand

Exercice 4 : Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm

On considère à nouveau le problème de l'exercice 1 : on souhaite trouver x avec le plus possible de coordonnées nulles, tel que $Ax = b$.

L'algorithme est le suivant :

- On choisit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ quelconque et on suppose un $\lambda > 0$ fixé.
- Pour tout $k \geq 0$, on définit :

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - {}^t A(Ax^{(k)} - b) \\ x^{(k)} &= S_\lambda(y^{(k)}) \end{aligned}$$

où, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $S_\lambda(y)$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad (S_\lambda(y))_i = \max(0, |y_i| - \lambda) \cdot \text{signe}(y_i)$$

De manière un peu simpliste, on peut interpréter l'algorithme en disant qu'il alterne des étapes de descente de gradient de la fonction $x \rightarrow \|Ax - b\|^2$ (la définition de $y^{(k)}$ à partir de $x^{(k)}$) et des étapes de seuillage qui augmentent le nombre de coefficients nuls en annulant les coefficients de $y^{(k)}$ les plus proches de 0.

Dans cet exercice, on ne démontre pas que l'algorithme donne une bonne approximation du x cherché. On se contente de montrer que, si $\|A\| \leq 1$, alors la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $\tilde{x}$ qui est un point où la fonction $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ suivante atteint son minimum :

$$J(x) = \|Ax - b\|_2^2 + 2\lambda \|x\|_1$$

[Ce qu'on note $\|A\|$ est la norme opérateur de la matrice A , associée à la norme euclidienne.]

1. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$J(x^{(k)} + y) \leq H^{(k)}(y) - \|{}^t A(Ax^{(k)} - b)\|_2^2 + \|Ax^{(k)} - b\|_2^2$$

où $H^{(k)}$ est la fonction telle que $H^{(k)}(y) = \|y + {}^t A(Ax^{(k)} - b)\|_2^2 + 2\lambda \|x^{(k)} + y\|_1$.

b) Vérifier qu'on a égalité en $y = 0$.

c) Montrer que $H^{(k)}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) \leq H^{(k)}(0)$, avec égalité ssi $x^{(k+1)} = x^{(k)}$.

d) En déduire que $J(x^{(k+1)}) \leq J(x^{(k)})$ pour tout k , avec égalité ssi $x^{(k+1)} = x^{(k)}$.

2. a) Montrer que la suite $(x^{(k)})_k$ admet une valeur d'adhérence $\tilde{x}$ et que :

$$\tilde{x} = S_\lambda(\tilde{x} - {}^t A(A\tilde{x} - b))$$

b) Montrer que J atteint son minimum en $\tilde{x}$.

c) Montrer que $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{x}$.

[Indication : utiliser le fait que $x \rightarrow S_\lambda(x - {}^t A(Ax - b))$ est 1-lipschitzienne.]