# TP 2 - Processus stationnaires

**1 - Génération d'un processus gaussien**
Soit $X$ un bruit blanc gaussien d'espérance nulle et de variance 1. On suppose $a \in ]0;\pi[$ fixé. On note $g_a$ le filtre discret tel que $\hat{g}_a(\omega) = 1_{[-a;a]}(\omega)$, pour tout $\omega \in [-\pi;\pi]$. On pose :

$$X_a = X \star g_a$$

1. Dire pourquoi $X_a$ est un processus gaussien. Calculer son autocovariance.

2. Créer un fichier séparé `gauss.m`, dans lequel on va définir une fonction appelée `gauss`. Cette fonction prendra en argument deux paramètres $N$ et $a$ et renverra une réalisation de $(X_a[0], ..., X_a[N-1])$.
Dans les trois sous-questions qui suivent, on suppose qu'un entier $M \geq N$ a été fixé et on décrit le fonctionnement de `gauss` en fonction de $M$.
a) Tirer une réalisation $z = (z[0], ..., z[M-1])$ d'un vecteur gaussien dont toutes les coordonnées sont indépendantes, d'espérance nulle et de variance 1.
[Indication : utiliser la fonction `randn`.]
b) Calculer la convolution circulaire $z \star \tilde{g}_a$, où $\tilde{g}_a$ est le filtre fini de taille $M$ tel que :

$$\hat{\tilde{g}}_a[k] = 1_{[0;Ma/(2\pi)]}(k) + 1_{[M(1-a/(2\pi));M]}(k) \quad \forall k = 0, ..., M-1$$

c) Renvoyer $x = (z \star \tilde{g}_a[0], ..., z \star \tilde{g}_a[N-1])$.
d) Comment faut-il choisir $M$, en fonction de $a$ et $N$, pour que le résultat renvoyé par la fonction `gauss` soit une bonne approximation du résultat voulu ? Écrire le code correspondant.

3. Afficher une réalisation pour $a = 0,1$ et $N = 1000$.
[Indication : l'instruction `figure(n)` permet d'ouvrir un figure, avec le numéro $n$ ; l'instruction `plot(x)` affiche le tableau `x` sous la forme d'un graphe sur la figure courante.]

**2 - Filtrage de Wiener**
Dans cette partie, on suppose qu'on cherche à transmettre un signal, corrompu par un bruit additif. On suppose que le signal est une réalisation de $X_a$ et que le bruit est un bruit blanc gaussien $Y$, d'espérance nulle et de variance $\sigma^2$, indépendant du signal. Le signal bruité est donc une réalisation de :

$$D = X_a + Y$$

4. On cherche à débruiter le signal transmis en lui appliquant un filtre $h$ :

$$\tilde{X}_a = D \star h$$

On prend pour $h$ le filtre de Wiener adapté à la situation. Calculer $h$ en fonction de $a$ et $\sigma$.

5. Dans cette question, on prend $a = 0,1$ et $\sigma = 0,1$.
On pose $L = 100$ et $N = 1000$.
a) Calculer une réalisation de $(X_a[-L], ..., X_a[N+L-1])$ et une réalisation de $(Y[-L], ..., Y[N+L-1])$. Calculer la réalisation correspondante de $(D[-L], ..., D[N+L-1])$.
b) Calculer approximativement $(D \star h[0], ..., D \star h[N-1])$.
c) Afficher sur la même figure $(X_a[0], ..., X_a[N-1])$, $(D[0], ..., D[N-1])$ et $(D \star h[0], ..., D \star h[N-1])$.
[Indication : l'instruction `clf` efface le contenu de la figure courante ; `hold on` désactive l'effaçage automatique entre deux instructions d'affichage ; `plot(x,c)` permet d'afficher le graphe de `x` d'une autre couleur que bleu (`c='r'` donne du rouge, `c='g'` du vert ...).]

**3 - Effet du filtrage de Wiener sur un processus continu par morceaux**

Dans cette partie, on s'intéresse au processus stationnaire dont la loi est la suivante :

$$Z[0] = 1 \text{ ou } -1 \text{ avec probabilité } 1/2$$
$$Z[s] = X[0](-1)^{\epsilon_1+\ldots+\epsilon_s} \text{ si } s \geq 1$$
$$Z[s] = X[0](-1)^{\epsilon_{-1}+\ldots+\epsilon_{-s}} \text{ si } s \leq -1$$

où les $\epsilon_k$ sont des variables aléatoires indépendantes qui valent 0 avec probabilité $p$ et 1 avec probabilité $1-p$, pour un certain $p \in [0;1]$.

6. a) Écrire une fonction `cpm` qui prend en entrée $N$ et $p$ et renvoie une réalisation de $(Z[0], ..., Z[N-1])$.
b) Tracer le graphe d'une réalisation pour $N = 1000$ et $p = 0,995$.

7. Calculer $\hat{R}_Z$.

8. Refaire les questions 4. et 5. en remplaçant $X_a$ par $Z$, pour $p = 0,995$ et $\sigma = 0,1$.
Que pensez-vous de la qualité du débruitage ? Vous pouvez essayer de modifier un peu la valeur de $h$. Vous devriez observer que, quel que soit $h$, soit il reste du bruit dans les parties constantes du signal, soit les discontinuités du signal sont fortement lissées. Des méthodes de débruitage plus efficaces exisent pour des processus ayant le même genre de loi que $Z$ mais elles sont non-linéaires.