TP 2

Corrigé

1. On a vu la semaine dernière que la convolution d'un processus gaussien stationnaire avec un filtre est toujours un processus gaussien, de covariance :

$$R_{X_a} = R_X \star g_a \star \tilde{g}_a \quad \Rightarrow \quad \hat{R}_{x_a} = \hat{R}_X |\hat{g}_a|^2 = \hat{R}_X 1_{[-a;a]} = 1_{[-a;a]}$$

où $\tilde{g}_a[k] = g_a[-k]$.
2. d) Voir code.
4. $\hat{h} = \frac{\hat{R}_{X_a}}{\hat{R}_{X_a} + \hat{R}_Y} = \frac{1}{1+\sigma^2} 1_{[-a;a]}$.
7. On vérifie d'abord que $E(Z[0]) = 0$. On remarque aussi que, pour tout k et pour $a = 0, 1$, $P(\epsilon_k = a) = (1-p)^a p^{1-a}$. Pour tout $s \geq 0$:

$$\begin{aligned}
R_Z[s] &= E(Z[0]Z[s]) \\
&= E((-1)^{\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_s}) \\
&= \sum_{(\eta_1, \ldots, \eta_s) \in \{0,1\}^s} P(\epsilon_1 = \eta_1, \ldots, \epsilon_s = \eta_s)(-1)^{\eta_1 + \ldots + \eta_s} \\
&= \sum_{(\eta_1, \ldots, \eta_s) \in \{0,1\}^s} (1-p)^{\eta_1 + \ldots + \eta_s} p^{1-\eta_1 + \ldots + 1 - \eta_s} (-1)^{\eta_1 + \ldots + \eta_s} \\
&= p^s \sum_{(\eta_1, \ldots, \eta_s) \in \{0,1\}^s} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\eta_1 + \ldots + \eta_s} (-1)^{\eta_1 + \ldots + \eta_s} \\
&= p^s \sum_{(\eta_1, \ldots, \eta_s) \in \{0,1\}^s} \left(-\frac{1-p}{p}\right)^{\eta_1 + \ldots + \eta_s} \\
&= p^s \left(1 - \frac{1-p}{p}\right)^s = (2p-1)^s
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\hat{R}_Z[\omega] &= \sum_s R_Z[s] \exp(-is\omega) \\
&= \sum_s (2p-1)^{|s|} e^{-is\omega} \\
&= \sum_{s \geq 0} \left((2p-1)e^{-i\omega}\right)^s + \sum_{s \geq 0} \left((2p-1)e^{i\omega}\right)^s - 1 \\
&= \frac{1}{1-(2p-1)e^{-i\omega}} + \frac{1}{1-(2p-1)e^{i\omega}} - 1 \\
&= \frac{1-(2p-1)^2}{1 - 2.(2p-1)\cos(\omega) + (2p-1)^2}
\end{aligned}$$