

TP 3

Corrigé

1. a) Commençons par le cas où $j_1 = j_2$.

Si $n_1 = n_2$:

$$\begin{aligned}\langle \psi_{j_1, n_1}, \psi_{j_2, n_2} \rangle &= \sum_{k=2^j n}^{2^j(n+1)-1} 2^{-j} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \psi_{j_1, n_1}, \phi_{j_2, n_2} \rangle &= \sum_{k=2^j n}^{2^j n + 2^{j-1} - 1} 2^{-j} - \sum_{k=2^j n + 2^{j-1}}^{2^j(n+1)-1} 2^{-j} \\ &= 0\end{aligned}$$

Si $n_1 \neq n_2$, les fonctions ψ_{j_1, n_1} et ψ_{j_2, n_2} ou ψ_{j_1, n_1} et ϕ_{j_2, n_2} sont à support disjoints. On a donc :

$$\langle \psi_{j_1, n_1}, \psi_{j_2, n_2} \rangle = \langle \psi_{j_1, n_1}, \phi_{j_2, n_2} \rangle = 0$$

Traitons maintenant le cas où $j_1 < j_2$.

La fonction ψ_{j_1, n_1} est nulle sauf sur l'intervalle $\{2^{j_1} n_1, \dots, 2^{j_1}(n_1 + 1) - 1\}$. Sur cet intervalle, ψ_{j_2, n_2} et ϕ_{j_2, n_2} sont constantes (en $-1, 0$ ou 1). Notons α la valeur de cette constante. On a :

$$\begin{aligned}\langle \psi_{j_1, n_1}, \psi_{j_2, n_2} \text{ ou } \phi_{j_2, n_2} \rangle &= \alpha \sum_{k=2^{j_1} n_1}^{2^{j_1} n_1 + 2^{j_1-1} - 1} 2^{-j_1/2} - \alpha \sum_{k=2^{j_1} n_1 + 2^{j_1-1}}^{2^{j_1}(n_1+1)-1} 2^{-j_1/2} \\ &= 0\end{aligned}$$

On a enfin $\langle \phi_{j, n}, \phi_{j, n} \rangle = \sum_{k=2^j n}^{2^j(n+1)-1} 2^j = 1$ donc $\|\phi_{j, n}\|_2 = 1$.

b) Le nombre d'éléments dans cet ensemble vaut :

$$\begin{aligned}1 + 3 \sum_{0 < j \leq J} (2^{J-j})^2 &= 1 + 3 \cdot 2^{2J} \sum_{0 < j \leq J} 2^{-2j} \\ &= 1 + 3 \cdot 2^{2J} \frac{1 - 2^{-2J}}{3} \\ &= 2^{2J} = N^2\end{aligned}$$

Puisque la dimension de $\mathbb{R}^{N \times N}$ est également N^2 , il suffit de montrer que les éléments de l'ensemble sont de norme 1 et orthonormaux deux à deux pour montrer qu'il s'agit d'une base orthonormale.

Pour tous j, n_1, n_2 , $\|\psi_{j,n_1,n_2}^1\|_2 = \|\phi_{j,n_1}\|_2 \|\psi_{j,n_2}\|_2 = 1$. De même, $\|\psi_{j,n_1,n_2}^2\|_2 = \|\psi_{j,n_1,n_2}^3\|_2 = 1$. Pour la même raison, $\|\phi\|_2 = 1$.

Calculons maintenant le produit scalaire de deux éléments différents de la famille. Considérons donc deux éléments différents de l'ensemble, f^1 et f^2 . Chacun des deux s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} f^1 &= g_{j_1,n_1}^1 h_{j_1,n_2}^1 \\ f^2 &= g_{j_2,n_1}^2 h_{j_2,n_2}^2 \end{aligned}$$

où g et h sont des fonctions ϕ ou ψ .

Alors $\langle f^1, f^2 \rangle = \langle g_{j_1,n_1}^1, g_{j_2,n_1}^2 \rangle \langle h_{j_1,n_2}^1, h_{j_2,n_2}^2 \rangle$.

Par symétrie, on peut supposer qu'on a $j_1 \leq j_2$. Si $j_1 = j_2$, d'après la question a), $\langle g_{j_1,n_1}^1, g_{j_2,n_1}^2 \rangle = 0$ ou $\langle h_{j_1,n_2}^1, h_{j_2,n_2}^2 \rangle = 0$. Donc $\langle f^1, f^2 \rangle = 0$.

Si $j_1 < j_2$, alors g^1 ou g^2 est une fonction ψ . Supposons par exemple qu'il s'agit de g^1 . Alors $\langle g_{j_1,n_1}^1, g_{j_2,n_1}^2 \rangle = 0$, d'après la question a). Donc $\langle f^1, f^2 \rangle = 0$.

2. a) On traite le cas $s = 1$. Les deux autres sont similaires.

Pour tout $n_1 \in \{0, \dots, 2^J - 1\}$, on a, d'après la définition :

$$\begin{aligned} \phi_{1,n_1}[k_1] &= 2^{-1/2} \text{ si } k_1 = 2n_1 \text{ ou } k_1 = 2n_1 + 1 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

De même, pour tout $n_2 \in \{0, \dots, 2^J - 1\}$:

$$\begin{aligned} \psi_{1,n_2}[k_2] &= 2^{-1/2} \text{ si } k_2 = 2n_2 \\ &= -2^{-1/2} \text{ si } k_2 = 2n_2 + 1 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \psi_{1,n_1,n_2}^1[k_1, k_2] &= 1/2 \text{ si } k_1 = 2n_1 \text{ et } k_2 = 2n_2 \\ &= 1/2 \text{ si } k_1 = 2n_1 + 1 \text{ et } k_2 = 2n_2 \\ &= -1/2 \text{ si } k_1 = 2n_1 \text{ et } k_2 = 2n_2 + 1 \\ &= -1/2 \text{ si } k_1 = 2n_1 + 1 \text{ et } k_2 = 2n_2 + 1 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Puisque $a_{1,1,n_1,n_2} = \sum_{k_1,k_2} f[k_1, k_2] \psi_{1,n_1,n_2}^1[k_1, k_2]$, on obtient :

$$a_{1,1,n_1,n_2} = \frac{1}{2} (f[2n_1, 2n_2] + f[2n_1 + 1, 2n_2] - f[2n_1, 2n_2 + 1] - f[2n_1 + 1, 2n_2 + 1])$$

3. a) Pour tout $j \geq 2$, pour tous s, n_1, n_2 , $\psi_{j,n_1,n_2}^s[2k_1, 2k_2] = \psi_{j,n_1,n_2}^s[2k_1+1, 2k_2] = \psi_{j,n_1,n_2}^s[2k_1, 2k_2+1] = \psi_{j,n_1,n_2}^s[2k_1+1, 2k_2+1]$. En effet, $\phi_{j,n}[2k] = \phi_{j,n}[2k+1]$ et $\psi_{j,n}[2k] = \psi_{j,n}[2k+1]$ dès que $j \geq 2$.

De même, $\phi[2k_1, 2k_2] = \phi[2k_1+1, 2k_2] = \phi[2k_1, 2k_2+1] = \phi[2k_1+1, 2k_2+1]$.

Puisque g est une combinaison linéaire de ϕ et des ψ_{j,n_1,n_2}^s , g vérifie les égalités voulues.

3. b) Puisque $\tilde{f}[k_1, k_2] = 2g[2k_1, 2k_2]$, il faut calculer $g[2k_1, 2k_2]$.

D'après la définition de g :

$$f = g + \sum_{s=1,2,3} \sum_{n_1,n_2} a_{s,1,n_1,n_2}[f] \psi_{1,n_1,n_2}^s$$

Comme on l'a vu à la question 2.a), $\psi_{1,n_1,n_2}^1[2k_1, 2k_2] = 0$ sauf si $k_1 = n_1$ et $k_2 = n_2$, auquel cas on a $\psi_{1,n_1,n_2}^1[2k_1, 2k_2] = 1/2$. Le même résultat est vrai pour ψ_{1,n_1,n_2}^2 et ψ_{1,n_1,n_2}^3 .

Donc :

$$\begin{aligned} f[2k_1, 2k_2] &= g[2k_1, 2k_2] + \sum_{s=1,2,3} \sum_{n_1,n_2} a_{s,1,n_1,n_2}[f] \psi_{1,n_1,n_2}^s[2k_1, 2k_2] \\ &= g[2k_1, 2k_2] + \sum_{s=1,2,3} a_{s,1,k_1,k_2}[f] \psi_{1,k_1,k_2}^s[2k_1, 2k_2] \\ &= g[2k_1, 2k_2] + \frac{1}{2} (a_{1,1,k_1,k_2} + a_{2,1,k_1,k_2} + a_{3,1,k_1,k_2}) \\ &= g[2k_1, 2k_2] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (f[2k_1, 2k_2] + f[2k_1 + 1, 2k_2] - f[2k_1, 2k_2 + 1] - f[2k_1 + 1, 2k_2 + 1]) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (f[2k_1, 2k_2] - f[2k_1 + 1, 2k_2] + f[2k_1, 2k_2 + 1] - f[2k_1 + 1, 2k_2 + 1]) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (f[2k_1, 2k_2] - f[2k_1 + 1, 2k_2] - f[2k_1, 2k_2 + 1] + f[2k_1 + 1, 2k_2 + 1]) \right) \\ &= g[2k_1, 2k_2] \\ &\quad + \frac{1}{4} (3f[2k_1, 2k_2] - f[2k_1 + 1, 2k_2] - f[2k_1, 2k_2 + 1] - f[2k_1 + 1, 2k_2 + 1]) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$g[2k_1, 2k_2] = \frac{1}{4} (f[2k_1, 2k_2] + f[2k_1 + 1, 2k_2] + f[2k_1, 2k_2 + 1] + f[2k_1 + 1, 2k_2 + 1])$$

Puisque $\tilde{f}[k_1, k_2] = 2g[2k_1, 2k_2]$, le résultat voulu en découle.

4. a) On remarque que $\tilde{\phi}[k_1, k_2] = 2\phi[2k_1, 2k_2]$ pour tous k_1, k_2 et $\tilde{\psi}_{s,j,n_1,n_2}[k_1, k_2] = 2\psi_{s,j+1,n_1,n_2}[2k_1, 2k_2]$.

Donc, pour tous k_1, k_2 :

$$\begin{aligned} \tilde{f}[k_1, k_2] &= 2g[2k_1, 2k_2] \\ &= 2 \left(a_\phi[f] \phi[2k_1, 2k_2] + \sum_{j=2}^J \sum_{s=1,2,3} \sum_{n_1,n_2} a_{s,j,n_1,n_2}[f] \psi_{j,n_1,n_2}^s[2k_1, 2k_2] \right) \\ &= a_\phi[f] \tilde{\phi}[2k_1, 2k_2] + \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{s=1,2,3} \sum_{n_1,n_2} a_{s,j+1,n_1,n_2}[f] \tilde{\psi}_{j,n_1,n_2}^s[2k_1, 2k_2] \end{aligned}$$

b) Les coefficients de \tilde{f} sur la base d'ondelettes de Haar sont $a_\phi[f]$ et les $a_{s,j+1,n_1,n_2}[f]$ pour $j = 1, \dots, J-1$.

5. $a_\phi[f] = f$

6. a) On calcule $h[2k_1, 2k_2]$. Les trois autres égalités s'obtiennent de manière similaire.

D'après les définitions, $\psi_{1,n_1,n_2}^1[2k_1, 2k_2] = 1/2$ si $n_1 = k_1$ et $n_2 = k_2$ et $\psi_{1,n_1,n_2}^1[2k_1, 2k_2] = 0$ si $n_1 \neq k_1$ ou $n_2 \neq k_2$.

De même pour ψ_{1,n_1,n_2}^2 et ψ_{1,n_1,n_2}^3 .

Donc :

$$\begin{aligned} h[2k_1, 2k_2] &= \sum_s \sum_{n_1, n_2} a_{s,1,n_1,n_2}[f] \psi_{1,n_1,n_2}^s[2k_1, 2k_2] \\ &= \sum_s a_{s,1,k_1,k_2}[f] \psi_{1,k_1,k_2}^s[2k_1, 2k_2] \\ &= \frac{1}{2} (a_{1,1,k_1,k_2}[f] + a_{2,1,k_1,k_2}[f] + a_{3,1,k_1,k_2}[f]) \end{aligned}$$

b) D'après la question 4. a), les coefficients de la transformée en ondelettes de Haar de \tilde{f} valent $\tilde{a}_\phi[\tilde{f}] = a_\phi[f]$ et $\tilde{a}_{s,j,n_1,n_2}[\tilde{f}] = \tilde{a}_{s,j+1,n_1,n_2}[f]$ pour $j = 1, \dots, J-1$.

10. b) Les ondelettes de Haar présentent de fortes discontinuités selon des lignes horizontales et verticales. L'image reconstruite est une somme d'un petit nombre de ces ondelettes. Elle présente donc des discontinuités selon les mêmes lignes.

12. b) Le débruitage est très bon aux endroits où il y a des discontinuités nettes avec fort contraste. En revanche, il est moins satisfaisant aux endroits où l'image est discontinue mais le contraste est faible (la limite supérieure de la façade du bâtiment est un peu floue ; le bout des branches de l'arbre de droite est flou aussi) et aux endroits où il y a des textures (l'herbe, par exemple).

Dans ces zones, pour que la reconstruction soit bonne, il faudrait que les coefficients en ondelettes hautes fréquences (c'est-à-dire pour des petits j) soient conservés entre l'image initiale et l'image débruitée. Mais ces coefficients ont des valeurs nettement plus petites que les coefficients basses fréquences (et d'autant plus petites que le contraste est faible à l'endroit considéré). Ils ont donc tendance à être plus petits que τ et à être supprimés.