École Normale Supérieure
25 septembre 2014

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$1

Exercice 1 : espaces l^p, $1 \leq p < \infty$.
Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on note :

$$l^p = \left\{ (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p < +\infty \right\},$$

et pour toute suite $u \in l^p$, on définit $\|u\|_p = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p \right)^{1/p}$.

1. Vérifier que $(l^1, \|\cdot\|_1)$ est un espace vectoriel normé.

2. Le but est maintenant de montrer que, plus généralement, $(l^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour tout $p \in [1, +\infty[$.

a) Montrer que pour tous $a, b > 0$ et tous $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

b) [Inégalité de Hölder] En déduire que pour $u \in l^p$ et $v \in l^q$ (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_k| \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

c) En déduire l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$. Conclure.
[Indication : On pourra penser à écrire la majoration $|u_k + v_k|^p \leq (|u_k| + |v_k|)|u_k + v_k|^{p-1}$.]

Exercice 2 : Distance de Hausdorff sur l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^n$
Soit n un entier. On note d la distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compactes non-vides de $\mathbb{R}^n$. Étant donné un compact $K \in \mathcal{K}$, on note $\phi_K : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ la fonction « distance à K » définie par :

$$\phi_K(y) = \inf_{x\in K} d(x, y).$$

Étant donnés deux éléments K_1, K_2 de $\mathcal{K}$, on note :

$$\delta(K_1, K_2) = \|\phi_{K_1} - \phi_{K_2}\|_\infty$$

1. Montrer que δ définit une distance sur $\mathcal{K}$. C'est la *distance de Hausdorff*.
Est-il vrai que δ définit également une distance sur l'ensemble des parties non-vides de $\mathbb{R}^n$?

2. Pour tout compact $K \in \mathcal{K}$ et tout réel $\epsilon > 0$, on note

$$V_\epsilon(K) = \bigcup_{x \in K} \overline{B(x,\epsilon)}$$

où $B(x,\epsilon)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ dans $(\mathbb{R}^n, d)$. Montrer que, étant donnés deux compacts $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, on a $\delta(K_1, K_2) \leq \epsilon$ si et seulement si $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$ et $K_2 \subset V_\epsilon(K_1)$.

3. Soit $\mathcal{K}_0$ le sous-ensemble de $\mathcal{K}$ constitué des parties finies de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathcal{K}_0$ est dense dans $(\mathcal{K}, \delta)$.

Exercice 3 : topologie cofinie

Soit X un ensemble infini. On note $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des parties de X de complémentaire fini : $C \in \mathcal{C}_0$ si et seulement si $X - C$ est fini. Soit $\mathcal{C}$ la réunion de $\mathcal{C}_0$ et de l'ensemble vide.

1. a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une topologie sur X.
b) Cette topologie est-elle séparée ?

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X telle que, pour tout $y \in X$, $\{n \text{ tq } x_n = y\}$ est fini. Montrer que, pour tout $z \in X$, $x_n \to z$.

3. Soit Y un espace topologique séparé. Décrire l'ensemble des fonctions continues $f : X \to Y$.

Exercice 4 : topologie de la convergence simple

Soit $E = [0;1]^{[0;1]}$ (c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f : [0;1] \to [0;1]$). On munit cet espace de la topologie produit.

1. Montrer qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge pour la topologie produit si et seulement si elle converge simplement (au sens de la convergence simple usuelle des fonctions).

2. On note F le sous-ensemble de E constitué des fonctions continues par morceaux et muni de la topologie induite par celle de E.
Soit $I : F \to \mathbb{R}$ l'application suivante :

$$I(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

a) Montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F vers une fonction f_∞, alors $I(f_n) \to I(f_\infty)$.
b) Montrer que I n'est pas continue en la fonction nulle.

3. Montrer que E n'est pas métrisable.

Exercice 5 : topologie boîte

On munit $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ de la topologie dont une base est donnée par les ensembles produits de la forme $\prod_{k=0}^{+\infty} U_k$, où les U_k sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

1. Caractériser les suites convergentes pour cette topologie.

2. On définit la suite δ^n de terme général $\delta^n_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Considérons l'ensemble :

$$E = \left\{ \frac{1}{n}\delta^0 + x\delta^n,\, n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

a) Montrer que $0 \in \overline{E}$, mais qu'aucune suite de E ne converge vers 0.
b) En déduire que cette topologie n'est pas métrisable.

Exercice 6 : questions diverses

1. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, avec I infini. On note $Y = \prod_{i\in I} X_i$ et on munit cet ensemble de la topologie produit.
Pour tout $i \in I$, soit $E_i \subset X_i$. Les égalités suivantes sont-elles nécessairement vraies ?

$$\overline{\prod_{i\in I} E_i} = \prod_{i\in I} \overline{E}_i \qquad\qquad \overset{\circ}{\widehat{\prod_{i\in I} E_i}} = \prod_{i\in I} \overset{\circ}{E}_i$$

2. Soient X un ensemble fini et $\mathcal{T}$ une topologie séparée sur X. Que peut-on dire de $\mathcal{T}$?

3. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. On suppose que X et Y sont d'intersection vide. Existe-t-il nécessairement une distance D sur $X \cup Y$ telle que la distance induite par D sur X soit d et la distance induite par D sur Y soit δ ?

4. Trouver une topologie sur $\mathbb{N}$ qui n'admette pas de base d'ouverts dénombrable.

Exercice 7 : théorème de plongement d'Arens-Fells

Soit (X, d) un espace métrique.
On va montrer qu'il existe (V, N) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $F \subset V$ un fermé de V tel que (X, d) et (F, N) sont isométriques.

1. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies non vides de X et $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme. On fixe un point $a \in X$, et, pour chaque $x \in X$, on définit :

$$f_x : A \in \mathcal{F} \mapsto d(x, A) - d(a, A).$$

a) Montrer que, pour tout x, $f_x \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$.
b) Montrer que l'application $x \to f_x$ est une isométrie.
c) En déduire le résultat voulu.

2. Montrer qu'en revanche, il existe des espaces métriques qui ne sont isométriques à aucun sous-ensemble d'un espace préhilbertien (c'est-à-dire un espace vectoriel normé dont la norme provient d'un produit scalaire).