Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$10

Exercice 1 : questions diverses

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$||f(x) - f(y)|| \geq \alpha ||x - y||$$

Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers lui-même.

2. Soit $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

a) Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n$.

b) On rappelle que, pour toute $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, il existe une et une seule $B \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que :

$$B^2 = A$$

On note $B = \sqrt{A}$.

Montrer que l'application $A \in \mathcal{S}_n^{++} \to \sqrt{A} \in \mathcal{S}_n^{++}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3. Soit $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme admettant n racines réelles distinctes.

a) Montrer qu'il existe un voisinage $V \subset \mathbb{R}_n[X]$ de P_0 et des applications $\lambda_1, ..., \lambda_n : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que tout polynôme $P \in V$ a n racines distinctes, qui sont $\lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)$.

b) Soit $i \in \{1, ..., n\}$. Pour tout $P \in V$, calculer $d\lambda_i(P)$ en fonction de $\lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)$.

Exercice 2 : formes normales

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts contenant 0.

Soit $f : U \to V$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$.

1. On suppose que $df(0)$ est injective.

a) Montrer que $n \leq m$.

b) Montrer qu'il existe un voisinage $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ de 0, un voisinage $V_0 \subset V$ de 0 contenant $f(U_0)$, un voisinage $W_0 \subset \mathbb{R}^m$ de 0 et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\phi : V_0 \to W_0$ tels que :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in U_0, \quad \phi \circ f(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0)$$

[Indication : se ramener au cas où $df(0).e_i = e_i$ pour tout $i \leq n$ (où les e_i désignent les vecteurs de la base canonique) puis considérer l'application Γ, définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$, telle que $\Gamma(x_1, ..., x_m) = f(x_1, ..., x_n) + (0, ..., 0, x_{n+1}, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$.]

2. On suppose que $df(0)$ est surjective.

a) Montrer que $n \geq m$.

b) Montrer qu'il existe des voisinages $U_0, U_1 \subset \mathbb{R}^n$ de 0 et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\psi : U_0 \to U_1$ tels que :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in U_0, \quad f \circ \psi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_m)$$

Exercice 3 : théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non-constant. Soit S l'ensemble des zéros de P'. En considérant $\mathbb{C} - P(S)$, montrer que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
[Indication : Utiliser le théorème d'inversion locale et un argument de connexité.]

Exercice 4 : lemme de Morse

1. [Lemme de réduction régulière des formes quadratiques]
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées symétriques réelles de taille n. Fixons $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Soit :

$$\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to {}^tMA_0M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

a) Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa différentielle en Id.
b) Montrer que $d\phi(\mathrm{Id})$ est surjective.
c) Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $P : \mathcal{V} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

1. $P(A_0) = \mathrm{Id}$
2. $\forall A \in \mathcal{V}, A = {}^tP(A)A_0P(A)$

2. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0, df(0) = 0$ et $d^{(2)}f(0)$ est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
a) Montrer qu'il existe un voisinage de 0, $V \subset U$ et $(a_{i,j})_{i,j \leq n}$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de V vers $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x_1, ..., x_n) = x \in V, \qquad f(x) = \sum_{i,j \leq n} a_{i,j}(x) x_i x_j$$

[Indication : utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.]
b) Montrer qu'il existe V_1, V_2 deux voisinages de 0 inclus dans U et $\phi : V_1 \to V_2$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tels que $\phi(0) = 0$ et :

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in V_1, \quad f(\phi(x_1, ..., x_n)) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_n^2$$

[Une forme quadratique $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *non-dégénérée* s'il n'existe pas $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $q(x, y) = 0$ pour tout y.
La *signature* d'une forme quadratique non-dégénérée q, représentée par une matrice M, est un couple d'entiers (n_1, n_2) où n_1 est le nombre de valeurs propres positives de M et n_2 le nombre de valeurs propres négatives de M.]

Exercice 5 : théorème du rang constant

1. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts contenant 0.
Soit $f : U \to V$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$.
On suppose que l'application $\operatorname{rang} df$ admet un maximum local en 0 et on pose $r = \operatorname{rang} df(0)$.
a) Montrer que, pour tout x assez proche de 0, $\operatorname{rang} df(x) = r$.
b) Montrer qu'il existe $U_1 \subset \mathbb{R}^n$, $U_2 \subset U$ deux voisinages ouverts de 0, $\psi : U_1 \to U_2$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ un isomorphisme linéaire et $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_m : U_1 \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in U_1, \quad A \circ f \circ \psi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_r, \lambda_{r+1}(x), ..., \lambda_m(x))$$

[Indication : utiliser la question 2 de l'exercice 2.]
c) Montrer que, quitte à prendre U_1 et U_2 plus petits, on peut supposer que :

$$\forall k = r+1, ..., m, \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in U_1, \quad \lambda_k(x_1, ..., x_n) = \lambda_k(x_1, ..., x_r, 0, ..., 0)$$

d) Montrer qu'il existe $U_0 \subset \mathbb{R}^n, U_0' \subset U, V_0 \subset V, V_0' \subset \mathbb{R}^m$ des voisinages ouverts de 0 et $\psi : U_0 \to U_0', \phi : V_0 \to V_0'$ des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes tels que :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in U_0, \quad \phi \circ f \circ \psi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0)$$

[Indication : utiliser la question 1 de l'exercice 2.]
2. [Exemple 1] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application telle que $f(x, y) = (x, x^2)$. Donner un exemple de $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes ϕ, ψ, définis au voisinage de $(0, 0)$, tels que :

1. $\psi \circ f \circ \phi(a, b) = (a, 0)$ pour tout (a, b) assez proche de $(0, 0)$.
2. $\psi(0, 0) = (0, 0)$ et $\phi(0, 0) = (0, 0)$

3. [Exemple 2] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application telle que $f(x, y) = (x, y^2)$. Montrer qu'il n'existe pas ϕ et ψ comme dans la question précédente.
4. [Application] Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert V non-vide de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, injective. Montrer que $n \leq m$ et que $df(x)$ est injective sur un ouvert dense de V.