Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$10

Corrigé

Exercice 1

1. L'application f est injective : si $x \neq y$, alors $||f(x) - f(y)|| \geq \alpha ||x - y|| > 0$.
Montrons que $df(x)$ est injective pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \neq 0$:

$$df(x).h = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

Pour tout $t \neq 0$, $\left|\left|\frac{f(x+th)-f(x)}{t}\right|\right| \geq \alpha ||h||$. Donc $||df(x).h|| \geq \alpha||h||$. En particulier, $df(x).h \neq 0$.
Pour tout x, $df(x)$ est donc inversible : c'est une application linéaire injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

On en déduit que l'image de f est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est inversible donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe V et W des ouverts de $\mathbb{R}^n$, voisinages respectifs de x et $f(x)$, tels que $f : V \to W$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. En particulier, $W \subset f(\mathbb{R}^n)$. Cela implique que tout point $f(x) \in f(\mathbb{R}^n)$ admet un voisinage W qui est inclus dans $f(\mathbb{R}^n)$. Donc $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert.

Montrons que l'image de f est aussi fermée dans $\mathbb{R}^n$.
Puisqu'on est dans un espace métrique, il suffit de montrer qu'une suite de points de $f(\mathbb{R}^n)$ qui converge dans $\mathbb{R}^n$ a en fait sa limite dans $f(\mathbb{R}^n)$. Soit donc $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $f(\mathbb{R}^n)$, dont on note y la limite.
Pour tous n, m, $||x_n - x_m|| \leq \frac{1}{\alpha}||f(x_n) - f(x_m)||$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy (car $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ l'est). Elle converge alors dans $\mathbb{R}^n$ vers une limite x_∞. Puisque f est continue, on doit avoir $y = f(x_\infty)$. Donc $y \in f(\mathbb{R}^n)$.

Puisque $\mathbb{R}^n$ est connexe et puisque $f(\mathbb{R}^n)$ est ouverte est fermée, $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ donc f est surjective.
Comme on a aussi vu que f était injective, f est bijective. D'après le théorème d'inversion locale, la réciproque de f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de chaque point. Donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. a) On va montrer que $\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_n^{++}$ est fermé.
Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_n^{++}$ convergeant vers une limite M_∞. Montrons que $M_\infty \in \mathcal{S}_n - \mathcal{S}_n^{++}$.
Pour tout k, il existe $u_k \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tel que $\langle u_k, M_k u_k\rangle \leq 0$. On peut choisir un tel u_k de sorte que $||u_k|| = 1$.
Puisque la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ est compacte, on peut supposer, quitte à extraire, que u_k converge vers une limite $u_\infty \neq 0$. Alors :

$$\langle u_\infty, M_\infty u_\infty\rangle \leq 0$$

Donc $M_\infty \in \mathcal{S}_n - \mathcal{S}_n^{++}$.
b) Soit $\phi : \mathcal{S}_n^{++} \to \mathcal{S}_n^{++}$ l'application telle que $\phi(A) = A^2$.
D'après le rappel, ϕ est une bijection.
L'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (car toutes ses coordonnées sont polynomiales en les coefficients de A). De plus, pour toutes $A \in \mathcal{S}_n^{++}, H \in \mathcal{S}_n$:

$$d\phi(A).H = AH + HA$$

Pour toute A, $d\phi(A)$ est injective. En effet, si $H \neq 0$, puisque H est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (car symétrique) en non-nulle, il existe $x \neq 0$ et $\alpha \neq 0$ tels que $Hx = \alpha x$. On a alors $\langle x, (AH + HA)x\rangle = \langle x, A(\alpha x)\rangle + \langle Hx, Ax\rangle = 2\alpha\langle x, Ax\rangle \neq 0$.
Donc $d\phi(A)$ est inversible pour toute A et ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. D'après le théorème d'inversion locale, son inverse, $\sqrt{.}$, est donc aussi $\mathcal{C}^\infty$.
3. a) Soient $r_1, ..., r_n$ les racines de P_0. Posons $\phi : \mathbb{R}^n[X] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$\phi(P, x_1, ..., x_n) = (P(x_1), ..., P(x_n))$$

Pour tout P, la différentielle de $\phi(P, .)$ vaut, en tout $(x_1, ..., x_n)$:

$$d\phi(P, .)(x_1, ..., x_n).(y_1, ..., y_n) = (P'(x_1)y_1, ..., P'(x_n)y_n)$$

Elle est inversible si et seulement si $P'(x_i) \neq 0$ pour tout i.
Puisque P_0 est à racines simples, $P_0'(r_i) \neq 0$ pour tout i. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de $(P_0, r_1, ..., r_n)$. D'après ce théorème, il existe un voisinage V de P_0, un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de $(r_1, ..., r_n)$ et une application de classe $\Lambda : V \to U$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$\forall P \in V, \quad \phi(P, x_1, ..., x_n) = 0 \text{ ssi } (x_1, ..., x_n) = \Lambda(P)$$

Notons $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les coordonnées de Λ. Ce sont des applications $\mathcal{C}^\infty$.
Pour tout $P \in V$, $\phi(P, \lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)) = 0$. Donc $\lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)$ sont des racines de P. Lorsque P tend vers P_0, $\lambda_i(P)$ tend vers r_i pour tout i (car $\Lambda(P_0) = (r_1, ..., r_n)$). Donc, pour P assez proche de P_0, les $\lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)$ sont des réels deux à deux distincts, ce qui implique que P a n racines distinctes, qui sont $\lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)$.
b) On garde les notations de la sous-question précédente.
Pour tout P :

$$\phi(P, \lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)) = 0$$

La différentielle de ϕ vaut :

$$d\phi(P, x_1, ..., x_n).(Q, y_1, ..., y_n) = (Q(x_1) + P'(x_1)y_1, ..., Q(x_n) + P'(x_n)y_n)$$

La différentielle de $g : P \to \phi(P, \lambda_1(P), ..., \lambda_n(P))$ vaut donc :

$$\begin{aligned} dg(P).Q &= d\phi(P, \lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)).(Q, d\lambda_1(P).Q, ..., d\lambda_n(P).Q) \\ &= (Q(\lambda_1(P)) + P'(\lambda_1(P))d\lambda_1(P).Q, ..., Q(\lambda_n(P)) + P'(\lambda_n(P))d\lambda_n(P).Q) \end{aligned}$$

Puisque g est identiquement nulle :

$$\forall P, Q, i, \quad d\lambda_i(P).Q = -\frac{Q(\lambda_i(P))}{P'(\lambda_i(P))}$$

Exercice 2

1. a) L'application $df(0)$ est linéaire et injective, de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$, donc $n \leq m$.
b) $(df(0).e_1, ..., df(0).e_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^m$, puisque $df(0)$ est injective. Il existe donc une application linéaire bijective $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ telle que $L(df(0).e_i) = e_i$ pour tout $i \leq n$.
Quitte à remplacer f par $L \circ f$, on peut alors supposer que $df(0).e_i = e_i$ pour tout $i \leq n$.
Posons, pour tout $(x_1, ..., x_m)$ assez proche de 0 :

$$\Gamma(x_1, ..., x_m) = f(x_1, ..., x_n) + (0, ..., 0, x_{n+1}, ..., x_m)$$

L'application Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $i \leq m$:

$$d\Gamma(0).e_i = e_i$$

La différentielle $d\Gamma(0)$ est donc inversible. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale : il existe un voisinage W_0 de 0 et un voisinage V_0 de 0 tels que Γ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de W_0 vers V_0.
Notons $\phi : V_0 \to W_0$ la réciproque de Γ. C'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
Pour tout $(x_1, ..., x_n)$ suffisamment proche de 0 pour que $(x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) \in W_0$:

$$\phi \circ f(x_1, ..., x_n) = \phi \circ \Gamma(x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0)$$

2. a) L'application $df(0)$ est une surjection linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$. Donc $n \geq m$.
b) Comme à la question 1.b), quitte à remplacer f par $f \circ \tilde{A}$, où A est affine, on peut supposer que $df(0).e_i = e_i$ si $i \leq m$ et $df(0).e_i = 0$ si $i > m$. On pose, pour tout $(x_1, ..., x_n)$ assez proche de 0 :

$$\Gamma(x_1, ..., x_n) = (f(x_1, ..., x_n), x_{m+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Comme $d\Gamma(0).e_i = e_i$ pour tout i, $d\Gamma(0)$ est inversible et, par le théorème d'inversion locale, il existe $U_0, U_1 \subset \mathbb{R}^n$, des voisinages de 0 tels que Γ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U_1 vers U_0.
Soit $\psi : U_0 \to U_1$ la réciproque de Γ. Notons $\psi_1, ..., \psi_n$ les applications coordonnées de ψ. Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in U_0$:

$$(f \circ \psi(x_1, ..., x_n), \psi_{m+1}(x), ..., \psi_n(x)) = \Gamma \circ \psi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n)$$

donc $f \circ \psi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_m)$.

Exercice 3

Posons $A = P^{-1}(P(S))$.
Sur $\mathbb{C} - A$, P est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local, d'après le théorème d'inversion locale. En effet, sa différentielle est inversible en tous les points de $\mathbb{C} - A$ car $\mathbb{C} - A \subset \mathbb{C} - S$. L'image par P de $\mathbb{C} - A$ est donc un ouvert de $\mathbb{C} - P(S)$.

De plus, l'image de $\mathbb{C}-A$ par P est aussi un fermé de $\mathbb{C}-P(S)$: si $P(x_n) \to z \in \mathbb{C}-P(S)$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car $|P(x)| \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$) donc, quitte à extraire, on peut supposer qu'elle converge vers une limite x_∞. Alors $z = P(x_\infty)$ et, puisque $z \in \mathbb{C}-P(S)$, $x_\infty \in \mathbb{C}-A$ donc $z \in P(\mathbb{C}-A)$.
Puisque $\mathbb{C}-P(S)$ est connexe, l'image de $\mathbb{C}-A$ par P, qui est un ouvert et fermé non-vide, est égale à $\mathbb{C}-P(S)$. Donc $\mathbb{C}-P(S) \subset P(\mathbb{C})$. Puisque $P(S)$ est aussi inclus dans $P(\mathbb{C})$, $\mathbb{C} \subset P(\mathbb{C})$. Donc $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Exercice 4

1. a) Si on identifie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$, chacune des coordonnées de ϕ est une application polynomiale. L'application ϕ est donc $\mathcal{C}^\infty$.
$\phi(\mathrm{Id}+H) = A_0 + {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0H = \phi(\mathrm{Id}) + {}^tHA_0 + A_0H + o(H)$
La différentielle de ϕ en Id vaut donc $d\phi(\mathrm{Id}).H = {}^tHA_0 + A_0H$.
b) Pour toute $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $d\phi(\mathrm{Id}).(A_0^{-1}S/2) = S$ donc $d\phi(\mathrm{Id})$ est surjective.
c) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $\frac{n(n+1)}{2} = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, qui soit un supplémentaire de $\operatorname{Ker} d\phi(Id)$. Alors $d\phi(Id)$ réalise une bijection de V vers $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Posons $\phi_0(x) = \phi(Id + x)$ pour tout $x \in V$. Comme $d\phi_0(0) = d\phi(Id)_{|V}$ est une bijection, ϕ_0 est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local (entre un voisinage de 0 dans V et un voisinage de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$), d'après le théorème d'inversion locale.
Posons $P(A) = Id + \phi_0^{-1}(A)$. Alors $P(A_0) = Id + \phi_0^{-1}(A_0) = Id$.
De plus, pour toute A assez proche de A_0 :

$$ {}^tP(A)A_0P(A) = \phi(P(A)) = \phi_0(\phi_0^{-1}(A)) = A $$

2. a) D'après la formule de Taylor, pour tout $x \in U$, si le segment $[0;x]$ est inclus dans U (ce qui est vrai sur un voisinage V assez petit de 0) :

$$ f(x) = f(0) + df(0).x + \frac{1}{2}\int_0^1 d^{(2)}f(tx).(x,x)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 d^{(2)}f(tx).(x,x)dt $$

Pour tout $y \in U$, on note $M(y) = (M_{i,j}(y))_{i,j\le n}$ la matrice qui représente la forme bilinéaire symétrique $d^{(2)}f(y)$ dans la base canonique. Avec cette notation :

$$ f(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sum_{i,j} M_{i,j}(tx)x_ix_j\right)dt = \sum_{i,j}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 M_{i,j}(tx)dt\right)x_ix_j $$

Posons, pour tous $i,j \le n$, $a_{i,j}(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 M_{i,j}(tx)dt$. Puisque $M_{i,j}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ pour tous i,j, l'application $a_{i,j}$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ (on peut différencier sous le signe intégrale).
b) Avec les définitions de la question précédente, $A(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j\le n}$ est une matrice symétrique pour tout $x \in V$ (et si on avait définis autrement les $a_{i,j}$, on pourrait remplacer $a_{i,j}$ par $\frac{a_{i,j}+a_{j,i}}{2}$ et la matrice serait symétrique).
De plus, par continuité des $a_{i,j}$ en 0, on a $f(x) = {}^txA(0)x + o(||x||^2)$ lorsque $x \to 0$. Donc $A(0)$ est la matrice associée à la forme bilinéaire $d^{(2)}f(0)$ dans la base canonique.
D'après la première question, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $A(0)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $P : \mathcal{V} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $P(A(0)) = \mathrm{Id}$ et, pour tout $A \in \mathcal{V}$, $A = {}^tP(A)A(0)P(A)$.

Quitte à diminuer la taille de V, on peut supposer que $A(x) \in \mathcal{V}$ pour tout $x \in V$. On a alors, pour tout $x \in V$:

$$f(x) = {}^t x A(x) x = {}^t x {}^t P(A(x)) A(0) P(A(x)) x$$

Puisque $A(0)$ est de signature $(p, n-p)$, il existe $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A(0) = {}^t G \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ & & & -1 & \\ 0 & & \dots & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} G$$

En notant D la matrice diagonale de l'équation précédente, on a, pour tout $x \in V$:

$$f(x) = {}^t(GP(A(x))x) D (GP(A(x))x)$$

Posons $\psi(x) = GP(A(x))x$. On a $d\psi(0) = GP(A(0))$ (car $\psi(x) = (GP(A(0)) + o(1))x = GP(A(0))x + o(||x||)$ quand $x \to 0$) donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe deux voisinages V_1, V_2 de 0 tels que ψ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V_1 sur V_2.
Si on pose $\phi = \psi^{-1}$, on a :

$$f(\phi(x)) = {}^t(\psi(\phi(x))) D (\psi(\phi(x))) = {}^t x D x = x_1^1 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$$

Exercice 5

1. a) Puisque r est un maximum local de $\operatorname{rang} df$, $\operatorname{rang} df(x) \leq r$ pour tout x assez proche de 0. Montrons l'inégalité inverse.
Puisque son rang est r, la matrice jacobienne $J_f(0)$ admet une sous-matrice carrée inversible de taille $r \times r$. Comme le déterminant est une application continue, la sous-matrice de $J_f(x)$ située à la même position est également inversible pour tout x assez proche de 0, ce qui implique :

$$\operatorname{rang} df(x) = \operatorname{rang} J_f(0) \geq r$$

b) Quitte à composer f par un isomorphisme linéaire bien choisi, A, on peut supposer que $\operatorname{Im} df(0) = \operatorname{Vect}\{e_1, \dots, e_r\}$.
Soit $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ la projection sur les r premières coordonnées.
L'application $\pi \circ f$ est différentiable, de différentielle en 0 $d(\pi \circ f)(0) = \pi \circ df(0)$. Son image est $\pi(\operatorname{Im} df(0)) = \mathbb{R}^r$. La différentielle est donc surjective.
D'après la question 2. de l'exercice 2, il existe U_1, U_2 deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\psi : U_1 \to U_2$ tels que, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in U_1$:

$$\pi \circ f \circ \psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r)$$

Si on note $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_m$ les $m - r$ dernières coordonnées de f, on a alors, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in U_1$:

$$f \circ \psi(x_1, \dots, x_n) = (\pi \circ f \circ \psi(x_1, \dots, x_n), \lambda_{r+1}(x), \dots, \lambda_m(x)) = (x_1, \dots, x_r, \lambda_{r+1}(x), \dots, \lambda_m(x))$$

c) D'après la question a), quitte à prendre U_1 et U_2 plus petits, on peut supposer que rang $df = r$ sur U_2. On fait cette hypothèse à partir de maintenant.
Pour tout $x \in U_1$, la différentielle de $A \circ f \circ \psi$ en x vaut $A \circ df(\psi(x)) \circ d\psi(x)$. Comme A et $d\psi$ sont inversibles, le rang de cette différentielle est le même que celui de $df(\psi(x))$, c'est-à-dire r.
La jacobienne en x de $A \circ f \circ \psi$ vaut, d'après l'égalité de la question b) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \lambda_{r+1}}{\partial x_1}(x) & \dots & & \frac{\partial \lambda_{r+1}}{\partial x_{r+1}}(x) & \dots & \frac{\partial \lambda_{r+1}}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_m}{\partial x_1}(x) & \dots & & \frac{\partial \lambda_m}{\partial x_{r+1}}(x) & \dots & \frac{\partial \lambda_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Pour que cette matrice soit de rang r, il faut qu'on ait $\left(\frac{\partial \lambda_i(x)}{\partial x_j}\right)_{i \geq r+1, j \geq r+1} = 0$.
Quitte à réduire encore un peu U_1 et U_2, de façon à ce que U_1 soit de la forme $U_1^{(1)} \times U_1^{(2)}$ avec $U_1^{(1)} \subset \mathbb{R}^r$ et $U_1^{(2)} \subset \mathbb{R}^{n-r}$ connexe par arcs, on a alors, pour tout k et tout $x = (x_1, ..., x_n) \in U_1$:

$$\lambda_k(x_1, ..., x_n) = \lambda_k(x_1, ..., x_r, 0, ..., 0)$$

(car les dérivées partielles de λ_k selon $x_{r+1}, ..., x_n$ sont nulles.)
d) Soit g l'application définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^r$ telle que :

$$g(x_1, ..., x_r) = (x_1, ..., x_r, \lambda_{r+1}(x_1, ..., x_r, 0, ..., 0), ..., \lambda_m(x_1, ..., x_r, 0, ..., 0))$$

Cette application est différentiable, de différentielle injective en 0 : en effet, si on note π la projection sur les r premières coordonnées, $\pi \circ g = Id$ donc $\pi \circ dg(0) = Id$, ce qui impose à $dg(0)$ d'être injective.
D'après la question 1. de l'exercice 2, il existe donc V_A, V_0' deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^m$ et $\tilde{\phi} : V_A \to V_0'$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tels que, pour tout $(x_1, ..., x_n)$ assez proche de 0 :

$$\tilde{\phi} \circ g(x_1, ..., x_r) = (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0)$$

On pose $\phi = \tilde{\phi} \circ A$ et $V_0 = A^{-1}(V_A)$. Alors $\phi : V_0 \to V_0'$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et, pour tout $(x_1, ..., x_n)$ dans U_0 (quitte à réduire encore un peu U_0) :

$$\begin{aligned} \phi \circ f \circ \psi(x_1, ..., x_n) &= \tilde{\phi} \circ A \circ f \circ \psi(x_1, ..., x_n) \\ &= \tilde{\phi}(x_1, ..., x_r, \lambda_{r+1}(x_1, ..., x_n), \lambda_m(x_1, ..., x_n)) \\ &= \tilde{\phi}(x_1, ..., x_r, \lambda_{r+1}(x_1, ..., x_r, 0, ..., 0), \lambda_m(x_1, ..., x_r, 0, ..., 0)) \\ &= \tilde{\phi} \circ g(x_1, ..., x_r) \\ &= (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0) \end{aligned}$$

2. a) On peut prendre $\phi(a, b) = (a, b)$ et $\psi(a, b) = (a, b - a^2)$.

b) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $df(x, y).(h, l) = (h, 2yl)$. On a donc $\text{rang}(df(x, y)) = 2$ si $y \neq 0$ et $\text{rang}(df(x, y)) = 1$ si $y = 0$.
Supposons qu'il existe ψ, ϕ des difféomorphismes au voisinage de $(0, 0)$ tels que $\psi \circ f \circ \phi(a, b) = (a, 0)$ pour tous (a, b) assez proches de $(0, 0)$. Puisque l'application $(a, b) \to (a, 0)$ a une différentielle de rang 1 en tout point, f doit aussi avoir une différentielle de rang 1 en tout point assez proche de 0. Or on a vu que ce n'était pas le cas.
c) Soit $U = \{x \in V \text{ tq } \text{rang}(df) \text{ admet un maximum local en } x\}$.

Lemme 5.1. *U est dense dans V.*

Démonstration. Soit W un ouvert de V quelconque. L'application $x \to \text{rang}(df(x))$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur W. Elle admet donc un maximum sur W. Si x_0 est un point où le maximum est atteint, $x_0 \in U$. □

Lemme 5.2. *U est ouvert et df est de rang localement constant sur U.*

Démonstration. Même démonstration qu'en 1.a). □

Montrons maintenant que, sur U, df est injective. Soit $x \in U$ quelconque.
Puisque df est de rang localement constant au voisinage de x, il existe (d'après le théorème de la question 1.d)), des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes ϕ et ψ, définis au voisinage de 0 et $f(x)$, tels que $\phi(0) = x, \psi(f(x)) = 0$ et, pour tout $y = (y_1, ..., y_n)$ assez proche de x :

$$\psi \circ f \circ \phi(y_1, ..., y_n) = (y_1, ..., y_r, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$$

où r est le rang de $df(x)$.
On a nécessairement $r = n$, sinon f n'est pas injective : $f \circ \phi(0, ..., 0, t) = f \circ \phi(0)$ pour tout t assez petit (et pourtant $\phi(0, ..., 0, t) \neq \phi(0)$ car ϕ est injective).
Donc $df(x)$ est une application de rang n de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$. Cela implique que $df(x)$ est injective et que $m \geq n$.