École Normale Supérieure
11 décembre 2014

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$11

Corrigé

Exercice 1

1. a) Soit $x :]a; b[\to \mathbb{R}$ la solution maximale. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, elle est unique. Montrons que $b = +\infty$. Le même raisonnement démontrerait aussi que $a = -\infty$.
La fonction f est bornée par 2. Si $b < +\infty$, la solution x reste bornée au voisinage de b : pour tout $t \in [0; b[$,

$$|x(t)| \leq |x(0)| + \int_0^t |x'(s)|ds \leq |x_0| + 2t \leq |x_0| + 2b$$

C'est en contradiction avec le théorème de sortie des compacts. Donc $b = +\infty$.
b) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(2k\pi) > \cos(2k\pi) - 1 = 0$ et $f((2k+1)\pi) < \cos((2k+1)\pi) + 1 = 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, f admet donc un zéro sur $[2k\pi, (2k+1)\pi]$.
c) Si x n'est pas bornée, il existe k tel que x prend la valeur t_k en un certain point T.
Alors x est solution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(T) = t_k \end{cases}$$

La solution de ce système différentiel est unique donc x est égal à la fonction constante en t_k. En effet, la fonction $x : t \to t_k$ est solution du système, puisque, pour tout t, $x'(t) = 0 = f(t_k) = f(x(t))$.
Donc x est une fonction constante et x est bornée.
2. a) $x'(t_0) = f(t_0, a) < g(t_0, a) = y'(t_0)$
Donc $y(t) - x(t) = (y'(t_0) - x'(t_0))(t - t_0) + o(t - t_0)$ est strictement positif lorsque $t - t_0$ est strictement positif et assez proche de 0. Il existe donc δ tel que, pour tout $t \in]t_0; t_0 + \delta[$:

$$y(t) > x(t)$$

b) Soit $I = \{t \in [t_0; 1] \text{ tq } \forall t' \in [t_0; t], x(t') \leq y(t')\}$. Cet ensemble est un intervalle de la forme $[t_0; T]$ ou $[t_0; T[$.
Il ne peut pas être de la forme $[t_0; T[$ car, s'il l'était, T appartiendrait à I, par continuité de x et y.
Il est donc de la forme $[t_0; T]$. Montrons que $T = 1$.
Si ce n'est pas le cas, on doit avoir $x(T) = y(T)$ (en effet, par définition de I, $x(T) \leq y(T)$; de plus, si l'inégalité est stricte, par continuité de x et y, on doit avoir $x < y$ sur un intervalle de la forme $[T; T + \epsilon[$ donc $[t_0; T + \epsilon[\subset I$ pour un certain $\epsilon > 0$).

Notons $a' = x(T) = y(T)$. D'après la question a), puisque x et y sont solutions des systèmes différentielles suivants :

$$(S_f) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(T) = a' \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (S_g) \qquad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(T) = a' \end{cases}$$

il existe $\delta > 0$ tel que $x < y$ sur $]T; T + \delta[$. Alors $[t_0; T + \delta[\subset I$. C'est en contradiction avec la définition de T.

3. a) Le fait que la solution maximale soit unique est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz. Elle est définie sur un intervalle de la forme $]a; b[$. Montrons que $b = +\infty$.
Posons $g :]a; b[\to \mathbb{R}$ la fonction telle que $g(t) = f(x(t))$.
Alors $g'(t) = df(x(t)).x'(t) = \langle \nabla f(x(t)), x'(t) \rangle = -||\nabla f(x(t))||^2$.
La fonction g est donc décroissante. Cela implique que x est bornée sur $[t_0; b[$. En effet, soit $M > f(x(t_0))$. Puisque $f(y) \to +\infty$ lorsque $||y|| \to +\infty$, il existe $R > 0$ tel que, si $||y|| \geq R$, alors $f(y) \geq M$. Pour tout $t \in [t_0; a[$, $f(x(t)) = g(t) \leq g(t_0) = f(x(t_0)) < M$ donc $||x(t)|| < R$. Donc si $b < +\infty$, on a une contradiction avec le théorème de sortie des compacts, de la même façon qu'à la question 1.a).
b) Pour la fonction $f(x) = x^4/4$, avec $n = 1$, on a $X(x) = -x^3$. L'équation est donc :

$$(S_X) \qquad \begin{cases} x'(t) = -x^3(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Si $x_0 \neq 0$, la fonction x ne s'annule pas (sinon elle est constante en 0, pour la même raison qu'en 1.c)). Alors $1 = -\frac{x'(t)}{x^3(t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)'(t)$.
Donc $\frac{1}{x^2(t)} = \frac{1}{x^2(t_0)} + 2(t - t_0)$ pour tout t dans l'intervalle de définition de x. La fonction x ne peut donc pas être définie en $t = t_0 - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2(t_0)}$ (sinon, on aurait en ce point $\frac{1}{x^2(t)} = 0$). Elle n'est donc pas définie sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 2
Une fonction continue et périodique étant nécessairement bornée, si l'équation admet une solution périodique, alors elle admet une solution bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrons la réciproque.
Soit T la période de A et b. Soit v une solution bornée sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation $\dot{u} = A(t)u + b(t)$.
Notons R_s^t la résolvante de l'équation $\dot{u} = A(t)u$, c'est-à-dire la fonction telle que, pour tout $\phi \in \mathbb{R}^n$, $t \to R_s^t \phi$ est l'unique solution de l'équation qui vaut ϕ en s. On sait que, pour tous s et t, R_s^t est une application linéaire.

Lemme 2.1. *Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), y \in \mathbb{R}^n$ tels que, pour toute solution u de l'équation :*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad u((k+1)T) = Mu(kT) + y$$

Démonstration. Soit u une solution de l'équation. D'après la formule de Duhamel, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$u((k+1)T) = R_{kT}^{(k+1)T} u(kT) + \int_{kT}^{k(T+1)} R_t^{k(T+1)} b(t) dt$$

Pour tous a, b, $R_{a+T}^{b+T} = R_a^b$. En effet, si w est une solution de l'équation telle que $w(a) = x$, alors $w(.-T)$ est une solution de l'équation qui vaut x en $a+T$ donc $R_{a+T}^{b+T}x = w(b+T-T) = w(b) = R_a^b x$.
Donc :

$$\begin{aligned} u((k+1)T) &= R_0^T u(kT) + \int_{kT}^{k(T+1)} R_{t-kT}^T b(t-kT)dt \\ &= R_0^T u(kT) + \int_0^T R_t^T b(t)dt \end{aligned}$$

Si on pose $M = R_0^T$ et $y = \int_0^T R_t^T b(t)dt$, on obtient le résultat. $\square$

Lemme 2.2. *Il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 = Mx_0 + y$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Alors $y \notin \operatorname{Im}(M - Id)$.
Soit p un projecteur sur $\operatorname{Vect}\{y\}$ dont le noyau contient $\operatorname{Im}(M - Id)$. Pour tout k :

$$p(v((k+1)T) - v(kT)) = p((M - Id)v(kT)) + p(y) = y$$

Par récurrence, on en déduit que $p(v(kT)) = p(v(0)) + ky$. Comme $y \neq 0$ (sinon $y \in \operatorname{Im}(M - Id)$), alors $(p(v(kT)))_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, ce qui est absurde car $(v(kT))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. $\square$

Achevons la démonstration.
Soit u_0 la solution de l'équation telle que $u_0(0) = x_0$. Alors, d'après le premier lemme, $u_0(T) = Mx_0 + y = x_0 = u_0(0)$. La fonction $u_0(.+T)$ vérifie donc :

$$u_0'(t+T) = A(t+T)u_0(t+T) + b(t+T) = A(t)u_0(t+T) + b(t)$$

Ainsi, $u_0(.+T)$ est solution de la même équation que u_0, avec la même condition initiale en 0. À condition initiale fixée, la solution est unique (d'après Cauchy-Lipschitz) donc $u_0(.+T) = u_0$ et u_0 est T-périodique.

Exercice 3

1. a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}E(x(t), y(t)) &= 2x(t)\dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t) + 4x^3(t)\dot{x}(t) + 4x(t)\dot{x}(t)y(t) + 2x^2(t)\dot{y}(t) \\ &= \dot{x}(t)(2x(t) + 4x^3(t) + 4x(t)y(t)) + \dot{y}(t)(2y(t) + 2x^2(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Quand $||(x, y)|| \to +\infty$, $E(x, y) \to +\infty$. En effet, $E(x, y) = x^2 + (y + x^2)^2$ donc, pour tout $M > 0$, l'inégalité $E(x, y) \leq M$ implique :

$$\begin{aligned} &(|x| \leq \sqrt{M}) \text{ et } (|y + x^2| \leq \sqrt{M}) \\ \Rightarrow\ &(|x| \leq \sqrt{M}) \text{ et } (|y| \leq |y + x^2| + |x^2| \leq M + \sqrt{M}) \end{aligned}$$

Cela implique que, pour tout M, $E(x,y) > M$ dès que $||(x,y)||$ est assez grande.
Si x et y sont des solutions maximales du système, $E(x(t),y(t))$ est une fonction constante donc bornée. Cela implique que $t \to (x(t),y(t))$ est une fonction bornée sur son intervalle de définition. Par le théorème de sortie des compacts, cela implique que x et y sont définies sur tout $\mathbb{R}$.
c) Soit (x,y) une solution du système. Soit C la valeur de $E(x,y)$.
Si $C = 0$, alors x et y sont identiquement nulles (puisque $0 = E(x,y) = x^2 + (y+x^2)^2$ implique $x = y = 0$). Supposons maintenant $C > 0$.
Pour tout t, $y^2(t) + 2x^2(t)y(t) + x^4(t) + x^2(t) - C = 0$ donc :

$$y(t) = -x^2(t) \pm \sqrt{C - x^2(t)}$$

Cela implique $\dot{x}(t) = \pm 2\sqrt{C - x^2(t)}$ pour tout t.
La fonction x n'est pas constante (sinon $\dot{x} = 0$ donc $y(t) = -x^2(t)$ pour tout t et $0 = \dot{y}(t) = -2x(t)$, ce qui implique $x(t) = 0$ donc $y(t) = 0$ et $C = 0$). Il existe donc un réel t_0 tel que $\dot{x}(t_0) \neq 0$.
Supposons par exemple $\dot{x}(t_0) > 0$. Soit I l'intervalle maximal contenant t_0 sur lequel $\dot{x}(t_0)$ ne s'annule pas. Sur cet intervalle :

$$\dot{x} = 2\sqrt{C - x^2}$$

On en déduit que $(\arcsin(x/\sqrt{C}))' = 2$. Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in I$, $x(t) = \sqrt{C}\sin(2t + b)$. Cela entraîne que I est de la forme $]a; a + \pi/2[$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$, avec :

$$x(a) = -\sqrt{C} \quad \text{et} \quad x(a + \pi/2) = \sqrt{C}$$

et, sur $]a; a + \pi/2[$, $x(t) = \sqrt{C}\sin(2(t-a) - \pi/2)$.
De même, un intervalle maximal où $\dot{x}$ serait négatif serait de la forme $]a; a + \pi/2[$ avec $x(t) = -\sqrt{C}\sin(2(t-a) - \pi/2)$.
Soit a tel que $x(t) = \sqrt{C}\sin(2(t-a) - \pi/2)$ sur $]a; a + \pi/2[$. En $a + \pi/2$ la dérivée seconde de x n'est pas nulle donc $\dot{x}$ change de signe. Sur l'intervalle $]a + \pi/2; a + \pi[$, $\dot{x}$ est donc négatif et $x(t) = -\sqrt{C}\sin(2(t - (a + \pi/2)) - \pi/2) = \sqrt{C}\sin(2(t-a) - \pi/2)$.
En $a + \pi$, $\dot{x}$ change à nouveau de signe et redevient positif. Par récurrence, on peut montrer que, pour tout $t \in]a; +\infty[, on a x(t) = \sqrt{C}\sin(2(t-a) - \pi/2)$. Un raisonnement similaire montre que la formule est également vraie pour $t \in]-\infty; a]$.
En posant $\alpha = -2a - \pi/2$ et en calculant y à partir de l'expression trouvée pour x, on obtient :

$$(x(t), y(t)) = (\sqrt{C}\sin(2t + \alpha), -C\sin^2(2t + \alpha) + \sqrt{C}\cos(2t + \alpha))$$

Réciproquement, on peut vérifier que toutes les fonctions de cette forme sont solutions de l'équation.

2. On vérifie que, si (x,y) est une solution maximale de l'équation, alors $E(x,y)' = -2ax^2$. Donc $E(x,y)$ est une fonction décroissante. Par le même raisonnement qu'en 1.b), (x,y) est donc définie sur un intervalle non majoré.
Montrons maintenant que l'intervalle de définition de (x,y) n'est pas minoré. Supposons par l'absurde qu'il l'est et notons-le $]t_0; +\infty[$.

Considérons maintenant $g(t) = E(x(-t), y(-t))$, pour tout $t \in]-\infty; -t_0[$. On a $g'(t) = 2ax^2(-t) \leq 2ag(t)$.
On en déduit, par le lemme de Gronwall, que $g(t) \leq g(-t_0 - 1)e^{2a(t+t_0+1)}$ pour tout $t \in [-t_0 - 1; -t_0[$. En particulier, $g(t)$ reste bornée quand $t \to -t_0$. Donc, d'après la question 1.b), $(x(-t), y(-t))$ reste également bornée quand $t \to -t_0$ (c'est-à-dire que (x, y) est bornée au voisinage de t_0). C'est en contradiction avec le théorème de sortie des compacts.

Exercice 4

1. a) Puisque $f \in B_{K,m}(f, \epsilon)$ pour toute f et tous $m \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$, on a :

$$\bigcup_{m,g,\epsilon} B_{K,m}(g, \epsilon) = \mathcal{C}_K^\infty$$

Soient $m_1, g_1, \epsilon_1, m_2, g_2, \epsilon_2$. Supposons que $B_{K,m_1}(g_1, \epsilon_1) \cap B_{K,m_2}(g_2, \epsilon_2) \neq \emptyset$. Soit f un élément de l'intersection.
Posons $g_3 = f, m_3 = \max(m_1, m_2)$ et fixons $\epsilon_3 < \min(\epsilon_1 - ||g_1 - f||_{m_1}, \epsilon_2 - ||g_2 - f||_{m_2})$.
Alors $f \in B_{K,m_3}(g_3, \epsilon_3) \subset B_{K,m_1}(g_1, \epsilon_1) \cap B_{K,m_2}(g_2, \epsilon_2)$.
D'après la propriété caractérisant les bases de topologie vue au début de l'année, $\{B_{K,m}(g, \epsilon)\}_{m,g,\epsilon}$ est une base d'ouverts de la topologie qu'elle engendre, c'est-à-dire une base de la topologie de $\mathcal{C}_K^\infty$.
b) Pour montrer la continuité de $+$, montrons que l'antécédant par $+$ de $B_{K,m}(g, \epsilon)$ est un ouvert pour tous m, g, ϵ.
Supposons m, g, ϵ fixés et notons $\Omega \subset \mathcal{C}_K^\infty \times \mathcal{C}_K^\infty$ l'antécédant de $B_{K,m}(g, \epsilon)$ par $+$.
Soit $(f_1, f_2) \in \Omega$.
Soit $\epsilon' > 0$ tel que $2\epsilon' < \epsilon - ||g - (f_1 + f_2)||_m$.
Alors $(f_1, f_2) \in B_{K,m}(f_1, \epsilon') \times B_{K,m}(f_2, \epsilon') \subset \Omega$. En effet, pour tout couple $(g_1, g_2) \in B_{K,m}(f_1, \epsilon') \times B_{K,m}(f_2, \epsilon')$, on a :

$$||g - (g_1 + g_2)||_m \leq ||g - (f_1 + f_2)||_m + ||f_1 - g_1||_m + ||f_2 - g_2||_m < ||g - (f_1 + f_2)||_m + 2\epsilon' < \epsilon$$

Cela démontre que Ω est un voisinage de chacun de ses points et donc que Ω est un ouvert.
On procède de manière similaire pour la continuité de $\times$.
c) S'il existe C, m tels que $|\phi(f)| \leq C||f||_m$ pour toute f, alors ϕ est continue.
En effet, pour toute f et tout $\epsilon > 0$:

$$\forall g \in B_{K,m}(f, \epsilon/C), \quad |\phi(f) - \phi(g)| \leq C||f - g||_m < \epsilon$$

donc, pour toute f, ϕ est continue en f. Cela revient à dire que ϕ est continue.
Réciproquement, si ϕ est continue, alors $\phi^{-1}(]-1; 1[)$ est un ouvert contenant 0. Il existe donc m, ϵ tels que :

$$B_{K,m}(0, \epsilon) \subset \phi^{-1}(]-1; 1[)$$

Posons $C = 2/\epsilon$. Pour toute $f \in \mathcal{C}_K^\infty$, $\epsilon f/(2||f||_m) \in B_{K,m}(0, \epsilon)$ donc $|\phi(\epsilon f/(2||f||_m))| \leq 1$. Ainsi :

$$|\phi(f)| \leq C||f||_m$$

2. a)

- $\emptyset, \mathcal{C}_c^\infty \in \mathcal{T}$
- Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, alors, pour toute $f \in \bigcup_i U_i$, il existe i_0 tel que $f \in U_{i_0}$. Il existe donc $V_{i_0} \in \mathcal{V}$ tel que $f + V_{i_0} \subset U_{i_0}$. Pour ce V_{i_0}, on a $f + V_{i_0} \subset \bigcup_i U_i$. Donc $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$.
- Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ et $f \in U_1 \cap U_2$, il existe $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ tels que $f + V_1 \subset U_1, f + V_2 \subset U_2$. Alors $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}$ et $f + (V_1 \cap V_2) \subset U_1 \cap U_2$.
  Donc $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

b) Soit $V \in \mathcal{V}$. Montrons que $V \in \mathcal{T}$.
Pour toute $f \in V$, si on note $W = \{g \in \mathcal{C}_c^\infty \text{ tq } f + g \in V \text{ et } f - g \in V\}$, l'ensemble W est convexe et symétrique (car V l'est). Montrons que, pour tout K, $W \cap \mathcal{C}_K^\infty$ est ouvert dans $\mathcal{C}_K^\infty$.
Soit $g \in W \cap \mathcal{C}_K^\infty$. Soit $K' = K \cup \text{Supp}(f)$.
Alors $f+g, f-g \in V \cap \mathcal{C}_{K'}^\infty$. Comme ce dernier ensemble est ouvert dans $\mathcal{C}_{K'}^\infty$, il existe $m, \epsilon > 0$ tels que :

$$B_{K',m}(f+g,\epsilon) \subset V \cap \mathcal{C}_{K'}^\infty \qquad B_{K',m}(f-g,\epsilon) \subset V \cap \mathcal{C}_{K'}^\infty$$

Alors, $B_{K,m}(g,\epsilon) \subset W \cap \mathcal{C}_K^\infty$. En effet, si $h \in B_{K,m}(0,\epsilon)$, $f + g + h \in B_{K',m}(f+g,\epsilon)$ et $f - (g+h) \in B_{K',m}(f-g,\epsilon)$. Donc $f + (g+h) \in V$ et $f - (g+h) \in V$. Donc $g + h \in W \cap \mathcal{C}_K^\infty$.
c) Soit $\Omega \in \mathcal{T}$. Notons Ω' son antécédant par $+$ et montrons que Ω' est un ouvert de $\mathcal{C}_c^\infty \times \mathcal{C}_c^\infty$.
Soit $(f_1, f_2) \in \Omega'$. Puisque $f_1 + f_2 \in \Omega$, il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $f_1 + f_2 + V \subset \Omega$.
D'après la question précédente (et comme l'ensemble des ouverts est stable par translation et homothétie), $f_1 + V/2$ et $f_2 + V/2$ sont des ouverts de $\mathcal{C}_c^\infty$. Or $(f_1 + V/2) \times (f_2 + V/2) \subset \Omega'$ (car V est convexe) donc il existe un voisinage ouvert de (f_1, f_2) inclus dans Ω'.

Pour la multiplication, soit à nouveau $\Omega \in \mathcal{T}$. Notons $\Omega' \subset \mathcal{C}_c^\infty \times \mathbb{R}$ son antécédant par $\times$. Montrons que Ω' est un ouvert.
Si $(f, \lambda) \in \Omega'$, alors il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $\lambda f + V \subset \Omega$.
Soit $\delta > 0$ tel que $2\delta f \in V$. Un tel δ existe. En effet, si K est tel que $\text{Supp}(f) \subset K$, alors $V \cap \mathcal{C}_K^\infty$ est un ouvert de $\mathcal{C}_K^\infty$ contenant 0. Il doit contenir δf pour tout δ assez petit.
Alors $(f + V\frac{1}{2(|\lambda|+|\delta|)}) \times]\lambda-\delta; \lambda+\delta[\subset \Omega'$. En effet, si $(f + v\frac{1}{2(|\lambda|+|\delta|)}, \lambda+\delta') \in (f + V\frac{1}{2(|\lambda|+|\delta|)}) \times]\lambda-\delta; \lambda+\delta[$, on a :

$$(f + v\frac{1}{2(|\lambda|+|\delta|)})(\lambda+\delta') = \lambda f + v\frac{\lambda+\delta'}{2(|\lambda|+|\delta|)} + \delta' f$$

Comme $2\delta f \in V$ et V est un convexe symétrique contenant 0, $2\delta' f \in V$, c'est-à-dire $\delta' f \in V/2$.
On a aussi $v\frac{\lambda+\delta'}{2(|\lambda|+|\delta|)} \in V/2$ car $\left|\frac{\lambda+\delta'}{2(|\lambda|+|\delta|)}\right| < 1/2$. Puisque $V/2 + V/2 \subset V$, $(f + v/2(|\lambda|+|\delta|))(\lambda+\delta') \in \lambda f + V \subset \Omega$.
d) Soit $\Omega \in \mathcal{T}$. Soit $\Omega' = \{f \in \mathcal{C}_c^\infty \text{ tq } \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \Omega\}$. Montrons que Ω' est aussi dans $\mathcal{T}$.
Soit $f \in \Omega'$. Soit $V \in \mathcal{V}$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x_i} + V \subset \Omega$.
Posons $V' = \{g \in \mathcal{C}_c^\infty \text{ tq } \frac{\partial g}{\partial x_i} \in V\}$. Alors $f + V' \subset \Omega'$. Il suffit donc pour conclure de montrer que $V' \in \mathcal{V}$.
Puisque V est un convexe symétrique qui contient 0, V' aussi. De plus, pour tout compact K, $V' \cap \mathcal{C}_K^\infty = \{g \in \mathcal{C}_K^\infty \text{ tq } \frac{\partial g}{\partial x_i} \in V \cap \mathcal{C}_K^\infty\}$. C'est donc l'antécédant par l'application $g \to \frac{\partial g}{\partial x_i}$ de l'ouvert $V \cap \mathcal{C}_K^\infty$. Comme cette application est continue sur $\mathcal{C}_K^\infty$ (on peut vérifier que les

antécédants par cette application des éléments de la base d'ouverts de la question 1.a) sont des ouverts), l'antécédant est un ouvert.
e) Supposons d'abord que L est continue.
Pour tout K compact, l'inclusion $i_K : \mathcal{C}_K^\infty \to \mathcal{C}_c^\infty$ est continue. En effet, si $V \in \mathcal{V}$, alors $i_K^{-1}(V) = V \cap \mathcal{C}_K^\infty$ est (par définition de $\mathcal{V}$) un ouvert de $\mathcal{C}_K^\infty$. Comme $\mathcal{V}$ engendre la topologie de $\mathcal{C}_c^\infty$, tous les ouverts de $\mathcal{C}_c^\infty$ sont d'antécédant par i_K ouvert. Donc i_K est continue.
Donc, pour tout K compact, $L \circ i_K$ est une application continue. D'après la question 1.c), il existe $m_K \in \mathbb{N}, C_K > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} &\forall f \in \mathcal{C}_K^\infty, \quad |L(i_K(f))| \leq C_K ||f||_{m_K} \\ \Leftrightarrow &\forall f \in \mathcal{C}_K^\infty, \quad |L(f)| \leq C_K ||f||_{m_K} \end{aligned}$$

Supposons maintenant que cette dernière propriété est vérifiée et montrons que L est continue.
Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty$. Soit $\epsilon > 0$. Montrons que $L^{-1}(]L(f) - \epsilon; L(f) + \epsilon[)$ est un voisinage de f.
Posons $V = \{g \in \mathcal{C}_c^\infty \text{ tq } |L(g)| < \epsilon\}$. Puisque L est linéaire, V est convexe, symétrique et contient 0.
Pour tout K compact, $V \cap \mathcal{C}_K^\infty$ est ouvert. En effet, $V \cap \mathcal{C}_K^\infty = \{g \in \mathcal{C}_K^\infty \text{ tq } |L \circ i_K(g)| < \epsilon\}$. L'application $L \circ i_K$ est continue puisqu'il existe C_K, m_K comme dans la question 1.c). Donc $V \cap \mathcal{C}_K^\infty = (L \circ i_K)^{-1}(] - \epsilon; \epsilon[)$ est un ouvert de $\mathcal{C}_K^\infty$.
3. a) Pour tout compact K, la propriété de la question 2.e) est vérifiée avec $C_K = 1$ et $m_K = 0$ donc δ_0 est continue. C'est une distribution.
b) Pour tout compact K :

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{C}_K^\infty, \quad |\phi_g(f)| &= \left| \int_K fg \right| \\ &\leq ||f||_0 \int_K |g| \end{aligned}$$

donc, si on pose $m_K = 0$ et $C_K = \int_K |g|$, la propriété de la question 2.e) est vérifiée. Donc ϕ_g est continue ; c'est une distribution.
4. a) On a $\Delta T = T \circ \Delta$.
L'application Δ est continue car on a vu que, pour $i = 1, 2$, $f \to \frac{\partial f}{\partial x_i}$ était une application continue. Comme T est également continue, ΔT est continue ; c'est une distribution.

b)

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_g(f) &= \int_{\mathbb{R}^2}(\Delta f)g \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} g(x_1,x_2)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2 + \int_{\mathbb{R}^2} g(x_1,x_2)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x_1,x_2)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(x_1,x_2)dx_1\right)dx_2 + \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x_1,x_2)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}(x_1,x_2)dx_2\right)dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} -\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)dx_1\right)dx_2 + \int_{\mathbb{R}} -\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)dx_2\right)dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_1}(x_1,x_2)dx_1\right)dx_2 + \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_2}(x_1,x_2)dx_2\right)dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(\Delta g) \\
&= \phi_{\Delta g}(f)
\end{aligned}$$

5. Posons $\phi = (\frac{\partial f_1}{\partial x_1}f_2 - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}f_1, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}f_2 - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}f_1)$.
On vérifie que $\mathrm{div}(\phi) = (\Delta f_1)f_2 - (\Delta f_2)f_1$.
De plus, pour tout $x = (\epsilon\cos\theta, \epsilon\sin\theta)$, en notant $n(x) = (-\cos\theta, -\sin\theta)$ la normale à S_ϵ (orientée vers l'extérieur de $\mathbb{R}^2 - D_\epsilon$) :

$$\begin{aligned}
\phi(x).n(x) &= -\cos\theta\phi_1(x) - \sin\theta\phi_2(x) \\
&= -f_2(x)\frac{\partial f_1}{\partial n}(x) + f_1(x)\frac{\partial f_2}{\partial n}(x)
\end{aligned}$$

Appliquée à ϕ pour $\Omega = \mathbb{R}^2 - D_\epsilon$, la formule de Stokes donne donc exactement le résultat voulu.
6. a) Calculons Δf_0 sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.
Comme $f_0(x) = \frac{1}{4\pi}\log(x_1^2+x_2^2)$, $\frac{\partial f_0}{\partial x_1}(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}$ et $\frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_1}(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}$.
On trouve symétriquement $\frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_2}(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}$. En sommant les deux termes, on a bien $\Delta f_0(x) = 0$ si $x \neq 0$.
b) Remarquons tout d'abord que ϕ_{f_0} est bien définie car f_0 est intégrable sur tout compact, malgré sa singularité en 0.
Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty$. Montrons que $\Delta\phi_{f_0}(f) = f(0)$.
Puisque f est à support compact et f_0 est intégrable sur tout compact :

$$\Delta\phi_{f_0}(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f_0\Delta f = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^2-D_\epsilon} f_0\Delta f$$

D'après la question 5. et la question 6.a), pour tout $\epsilon > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^2-D_\epsilon} f_0\Delta f = \int_{\mathbb{R}^2-D_\epsilon} f_0\Delta f - f\Delta f_0 = \int_{S_\epsilon}\left(f\frac{\partial f_0}{\partial n} - f_0\frac{\partial f}{\partial n}\right)d\sigma$$

(Dans la question 5., on avait supposé que f_1 et f_2 étaient toutes deux de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ici, cette hypothèse n'est pas vérifiée car f_0 n'est pas $\mathcal{C}^\infty$. Néanmoins, le résultat reste vrai. Pour le voir,

il suffit de l'appliquer à $\tilde{f}_0$ au lieu de f_0, où $\tilde{f}_0$ est une fonction qui coïncide avec f_0 sur $\mathbb{R}^2 - D_\epsilon$ mais est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_ϵ.)
On vérifie à l'aide des formules calculées à la question précédente que $\frac{\partial f_0}{\partial n}(\epsilon \cos\theta, \epsilon \sin\theta) = \frac{1}{2\pi\epsilon}$.
Lorsque $\epsilon \to 0^+$, $f(x) = f(0) + o(1)$ pour $x \in S_\epsilon$ et $\frac{\partial f}{\partial n}(x) = O(1)$, puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Donc :

$$\begin{aligned}
&\int_{S_\epsilon} \left(f \frac{\partial f_0}{\partial n} - f_0 \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\sigma \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{S_\epsilon} (f(0) + o(1)) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \log\epsilon \int_{S_\epsilon} O(1) d\sigma \\
&\qquad = f(0) + o(1) - O(\epsilon \log \epsilon) \\
&\qquad = f(0) + o(1)
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^2 - D_\epsilon} f_0 \Delta f = f(0)$ et $\Delta \phi_{f_0}(f) = f(0)$.
c) Pour cette question, on ne donne que le principe de la démonstration. On définit $T \star g$ par $(T \star g)(f) = T(f \star \breve{g})$, où $\breve{g}(x_1, x_2) = g(-x_1, -x_2)$. C'est une distribution car on peut vérifier que $f \in \mathcal{C}_c^\infty \to f \star \breve{g} \in \mathcal{C}_c^\infty$ est continue.
On a $\Delta(T \star g)(f) = T((\Delta f) \star \breve{g}) = T(\Delta(f \star \breve{g})) = (\Delta T) \star g(f)$, c'est-à-dire $\Delta(T \star g) = \Delta T \star g$.
En particulier, $\Delta(\phi_{f_0} \star g) = \Delta \phi_{f_0} \star g = \delta_0 \star g = \phi_g$.