École Normale Supérieure
18 décembre 2014

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$12

Exercice 1 : topologie de l'ordre

Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné.
Pour tous $x, y \in E$, on définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}]x;y[&= \{z \in E \text{ tq } x < z < y\} \qquad]-\infty;+\infty[= E \\ ]x;+\infty[&= \{z \in E \text{ tq } x < z\} \qquad]-\infty;x[= \{z \in E \text{ tq } z < x\} \end{aligned}$$

1. Montrer que ces ensembles forment une base de topologie. On appelle *topologie de l'ordre* la topologie qu'ils engendrent.

2. Montrer que la topologie qu'ils engendrent est séparée.

3. Sur $\mathbb{R}$, quelle est cette topologie ?

4. Soit $F \subset E$. On note $\mathcal{T}_E$ la topologie induite sur F par la topologie de l'ordre sur E et $\mathcal{T}_F$ la topologie de l'ordre associée à l'ordre $\leq$ restreint à F.
a) Montrer que $\mathcal{T}_E$ est plus fine que $\mathcal{T}_F$.
b) En considérant $E = \mathbb{R}$ et $F = \{-1\} \cup \{1/n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, montrer que la réciproque n'est pas toujours vraie.

Exercice 2 : ordinaux et compacité

Soit $\aleph_1$ le plus petit ordinal indénombrable, muni de la topologie de l'ordre.
Montrer que $\aleph_1$ est séquentiellement compact mais pas compact.
[La définition du plus petit ordinal indénombrable est au programme du cours de logique. Ici, il suffit de savoir que l'ensemble $\aleph_1$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\aleph_1$ est muni d'un ordre total, qu'on note $\leq$.
- Cet ordre est un bon ordre : tout sous-ensemble $E \subset \aleph_1$ non-vide admet un minimum.
- Pour tout $x \in \aleph_1$, $\{y \in \aleph_1 \text{ tq } y \leq x\}$ est dénombrable.
- $\aleph_1$ n'est pas dénombrable.]

Exercice 3 : supplémentaire fermé

Soit E un espace de Banach.
Soit $F_1 \subset E$ un sous-espace fermé de E.

1. Montrer que s'il existe $p : E \to E$ un projecteur continu tel que $\operatorname{Im} p = F_1$, alors F_1 admet un supplémentaire fermé.

2. Montrer la réciproque.

Exercice 4

Soit $L : l^\infty(\mathbb{N}) \to l^\infty(\mathbb{N})$ une application linéaire et continue (au sens de la norme $||.||_\infty$) telle que, pour toute $u \in l^1(\mathbb{N}) \subset l^\infty(\mathbb{N})$, $L(u) \in l^1(\mathbb{N})$.

1. Montrer que le graphe de $L_{|l^1}$ est fermé dans l'espace vectoriel normé $l^1 \times l^1$ muni de la norme $N_\infty(x, y) = ||x||_\infty + ||y||_\infty$.

2. Montrer que $L_{|l^1}$ est continue de $(l^1, ||.||_1)$ dans $(l^1, ||.||_1)$.

Exercice 5 : spectre des opérateurs continus sur un espace de Banach

Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{C}$. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$ une fonction linéaire continue de E dans E. Le *spectre* de u est, par définition, l'ensemble suivant :

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tq } u - \lambda \mathrm{Id} \text{ n'est pas un homéomorphisme}\}$$

Nous allons montrer que le spectre de u n'est pas vide. Par l'absurde, on suppose qu'il est vide.

1. Soit $\phi : \mathcal{L}_c(E) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue quelconque. On définit :

$$\begin{array}{rccc} \zeta : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \to & \phi((u - z\mathrm{Id})^{-1}) \end{array}$$

a) Montrer que $\zeta(z) \to 0$ lorsque $|z| \to +\infty$.

b) Montrer que ζ est développable en série entière en tout point de $\mathbb{C}$.

2. On admet le lemme suivant.

Lemme. *Soit $W : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si W est développable en série entière au voisinage de tout point et si $W(z) \to 0$ lorsque $|z| \to +\infty$, alors W est la fonction nulle.*

Obtenir une contradiction.

3. [Démonstration du lemme ; sans rapport avec le cours de topologie]

Soit $W : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ développable en série entière en tout point de $\mathbb{C}$ telle que $|W(z)| \to 0$ lorsque $|z| \to +\infty$.

a) Montrer que $|W|$ atteint son maximum sur $\mathbb{C}$. On note m_0 ce maximum.

b) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que si $|W(z_0)| = m_0$, alors W est constante au voisinage de z_0.

[Indication : montrer que tous les coefficients du développement en série entière de W en z_0 sont nuls, à part le premier]

c) Conclure.

Exercice 6

Soit $k > 1$.

On considère le système d'équations suivant :

$$n'(t) + n(t) = p(t)^k$$
$$p'(t) + p(t)^k = n(t)$$

avec la condition initiale $n(0) = n_0, p(0) = p_0$, pour n_0, p_0 des réels strictement positifs.

1. Montrer que ce système admet une unique solution sur $[0;+\infty[$.
[Indication : trouver une loi de conservation.]

2. Montrer que $n(t)$ et $p(t)$ convergent, lorsque t tend vers $+\infty$. Montrer que la convergence est exponentielle.

Exercice 7

Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive et croissante. Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle suivante sont bornées sur $\mathbb{R}^+$:

$$y''(t) + q(t)y(t) = 0$$

Exercice 8 : un théorème dû à Corominas et Sunyer i Balaguer

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$.
Montrer que f est une fonction polynomiale.