Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$12

Corrigé

Exercice 1

1. E est l'un des ensembles donc l'union de ces ensembles vaut E.
Soient $a, b, a', b' \in E \cup \{\pm\infty\}$. Supposons $]a;b[\cap]a';b'[\neq \emptyset$. Soit $c \in]a;b[\cap]a';b'[$. Montrons qu'il existe a'', b'' tels que $c \in]a'';b''[\subset]a;b[\cap]a';b'[$.
Si on pose $a'' = \max(a, a')$ et $b'' = \min(b, b')$ (avec, par convention, $\max(-\infty, x) = x$ et $\min(+\infty, x) = x$), cette propriété est vérifiée.

2. Soient $a, b \in E$ tels que $a \neq b$. Montrons l'existence de deux ouverts disjoints dont l'un contient a et l'autre b. Quitte à échanger a et b, on peut supposer $a < b$.
   - Premier cas : il existe z tel que $a < z < b$. Dans ce cas, $]-\infty; z[$ et $]z; +\infty[$ sont deux ouverts vérifiant les propriétés voulues.
   - Deuxième cas : un tel z n'existe pas. Alors $]-\infty; b[$ et $]a; +\infty[$ sont disjoints : un élément z qui appartiendrait aux deux devrait vérifier $a < z < b$, ce qu'on a supposé qu'aucun élément ne vérifiait. De plus, $a \in]-\infty; b[$ et $b \in]a; +\infty[$.

3. C'est la topologie engendrée par les intervalles ouverts : c'est la topologie usuelle.

4. a) Pour tous $a, b \in F \cup \{\pm\infty\}$, l'intervalle $]a;b[$ (sous-ensemble de F ; on le notera $]a;b[_F$ pour le différencier du sous-ensemble de E du même nom, qu'on notera $]a;b[_E$) est égal à :

$$]a;b[_F =]a;b[_E \cap F$$

Puisque $]a;b[_E$ est un ouvert de E pour la topologie de l'ordre sur E, $]a;b[_F =]a;b[_E \cap F \in \mathcal{T}_E$.
Comme les $]a;b[_F$ engendrent $\mathcal{T}_F$, tous les éléments de $\mathcal{T}_F$ appartiennent à $\mathcal{T}_E$. Donc $\mathcal{T}_E$ est plus fine que $\mathcal{T}_F$.
b) Le singleton $\{-1\}$ est un ouvert de $\mathcal{T}_E$ (c'est l'intersection de F et de $]-\infty; 0[$).
Ce n'est pas un ouvert de $\mathcal{T}_F$. En effet, s'il l'était, il devrait contenir un intervalle (non-vide) de la forme $]a;b[$, avec $a, b \in F \cup \{\pm\infty\}$ (car on a vu que ces ensembles formaient une base de $\mathcal{T}_F$).
Or, pour que $]a;b[$ soit inclus dans $\{-1\}$ et non-vide, il faut avoir $]a;b[= \{-1\}$. On doit alors avoir $a < -1$, c'est-à-dire $a = -\infty$. On doit avoir $b > -1$ mais alors $b = 1/n$ pour un certain n ou $b = +\infty$; dans chacun de ces deux cas, $]a;b[$ contient des éléments de la forme $1/m$ pour $m \in \mathbb{N}^*$ donc $]a;b[\not\subset \{-1\}$.

Exercice 2

Montrons d'abord que $\aleph_1$ est séquentiellement compact. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\aleph_1$. Montrons qu'on peut en extraire une sous-suite convergente.

Montrons d'abord qu'on peut en extraire une sous-suite croissante. On construit cette sous-suite par récurrence.

- Initialisation : $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admet un minimum (car l'ordre sur $\aleph_1$ est un bon ordre). Soit n_0 tel que $u_{n_0} = \min\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- Récurrence : supposons $n_0, ..., n_k$ construits et construisons n_{k+1}. On choisit $n_{k+1} > n_k$ tel que $u_{n_{k+1}} = \min\{u_n\}_{n>n_k}$. Avec ce choix, on a bien $u_{n_{k+1}} = \min\{u_n\}_{n>n_k} \geq \min\{u_n\}_{n>n_{k-1}} = u_{n_k}$.

Quitte à extraire, on peut donc supposer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Montrons maintenant qu'une suite croissante d'éléments de $\aleph_1$ converge. Si la suite est constante à partir d'un certain rang, c'est vrai. Supposons donc que la suite n'est pas constante à partir d'un certain rang.
Posons $E = \{x \text{ tq } \exists n, x \leq u_n\}$. Cet ensemble est dénombrable : c'est l'union sur n des $\{x \text{ tq } x \leq u_n\}$. C'est donc une union dénombrable d'ensembles dénombrables. Donc $E \neq \aleph_1$.
Puisque l'ordre est un bon ordre, $\aleph_1 - E$ admet un minimum, qu'on note m. Montrons que u_n tend vers m quand $m \to +\infty$.
Soit Ω un ouvert de $\aleph_1$ contenant m. Quitte à prendre Ω un peu plus petit, on peut supposer que Ω est de la forme $]a; b[$ avec $a, b \in \aleph_1 \cup \{\pm\infty\}$. Montrons que $u_n \in]a; b[$ pour tout n assez grand.
Si $a = -\infty$, on a $u_n \in]a; b[$ pour tout n. En effet, pour tout n, $u_n < m < b$.
Si $a \neq -\infty$, alors $a < m$. Puisque $m = \min(\aleph_1 - E)$, cela implique $a \notin \aleph_1 - E$, donc $a \in E$. Il existe donc N tel que $u_N \geq a$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire, il existe N_1 tel que $u_{N_1} > u_N \geq a$. Pour tout $n \geq N_1$, on a alors $u_n \geq u_{N_1} > a$. De plus, $u_n < m < b$ donc $u_n \in]a; b[$.
On a donc démontré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers m. Cela finit la démonstration de la compacité séquentielle.

Montrons que $\aleph_1$ n'est pas compact.
Pour tout x, notons $E_x = \{y \in \aleph_1 \text{ tq } y \leq x\}$. Pour tout x, $x \in E_x$ donc $\bigcup_{x\in\aleph_1} E_x = \aleph_1$.
Il n'existe pas de sous-famille finie de $\{E_x\}_{x\in\aleph_1}$ dont l'union vaille $\aleph_1$, sinon $\aleph_1$ serait égal à une union finie d'ensembles dénombrables (car E_x est dénombrable pour tout x) et serait donc dénombrable.

Exercice 3

1. Posons $F_2 = \operatorname{Ker} p$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de E, car p est continue.
De plus, $F_1 \oplus F_2 = E$ (c'est une propriété classique des projecteurs : si $x \in F_1 \cap F_2$, alors $x = p(x) = 0$, donc $F_1 \cap F_2 = \{0\}$; de plus, pour tout $x \in E$, $x = p(x) + (x - p(x)) \in F_1 + F_2$).

2. Soit F_2 un supplémentaire fermé de F_1.
L'application $\phi : F_1 \times F_2 \to E$ définie par $\phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ est une bijection continue. Comme $F_1 \times F_2$ est un espace de Banach (car F_1 et F_2, sous-espaces fermés d'un espace de Banach, sont eux-mêmes de Banach), le théorème de l'isomorphisme implique que ϕ^{-1} est continue.
Soit $g : F_1 \times F_2 \to F_1$ la projection sur la première coordonnée. C'est une application continue donc $g \circ \phi^{-1}$ est continue. L'application $g \circ \phi^{-1}$ est le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2.

Exercice 4

1. Notons $G_1 \subset l^1 \times l^1$ le graphe de $L_{|l^1}$ et $G_\infty \subset l^\infty \times l^\infty$ le graphe de L.
Puisque L est continue pour la norme $||.||_\infty$, G_∞ est fermé dans $l^\infty \times l^\infty$ muni de la norme N_∞.
Puisque $G_1 = G_\infty \cap (l^1 \times l^1)$, G_1 est fermé pour la topologie induite par N_∞ sur $l^1 \times l^1$.

2. Puisque $||.||_\infty \leq ||.||_1$, la topologie induite sur $l^1 \times l^1$ par N_∞ est moins fine que celle induite par $N_1(x, y) = ||x||_1 + ||y||_1$. Tous les sous-ensembles de $l^1 \times l^1$ qui sont fermés pour N_∞ sont donc également fermés pour N_1.
D'après la première question, le graphe de $L_{|l^1}$ est donc fermé pour la norme N_1.
Puisque $(l^1, ||.||_1)$ est un espace de Banach, le théorème du graphe fermé implique que $L_{|l^1}$ est continue de $(l^1, ||.||_1)$ dans lui-même.

Exercice 5

1. a) Il suffit de montrer que $|||(u - z\mathrm{Id})^{-1}||| \to 0$ lorsque $|z| \to +\infty$. Puisque ϕ est continue, cela impliquera que $\zeta(z) = \phi\left((u - z\mathrm{Id})^{-1}\right) \to 0$.
Pour tout $x \in E$, $||(u - z\mathrm{Id})x|| \geq ||zx|| - ||u(x)|| = (|z| - |||u|||)||x||$.
Donc, pour tout $y \in E$, si on pose $x = (u - z\mathrm{Id})^{-1}(y)$, on a $||y|| \geq (|z| - |||u|||)||(u - z\mathrm{Id})^{-1}(y)||$.
Cela implique que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > |||u|||$:

$$||(u - z\mathrm{Id})^{-1}(y)|| \leq \frac{||y||}{|z| - |||u|||} \qquad \forall y \in E$$
$$\Rightarrow \left|\left|\left|(u - z\mathrm{Id})^{-1}\right|\right|\right| \leq \frac{1}{|z| - |||u|||}$$

et cette dernière expression tend bien vers 0 lorsque $|z| \to +\infty$.
b) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Nous allons montrer que ζ est développable en série entière au voisinage de z_0.
Quitte à poser $\tilde{u} = u - z_0\mathrm{Id}$, on peut supposer que $z_0 = 0$.
L'application u étant inversible (sinon 0 appartiendrait au spectre), on peut écrire $(u - z\mathrm{Id})^{-1} = u^{-1}(\mathrm{Id} - zu^{-1})^{-1}$. Lorsque $|z| < \frac{1}{|||u^{-1}|||}$, on a :

$$(u - z\mathrm{Id})^{-1} = u^{-1} \circ \left(\sum_{n \geq 0} z^n u^{-n}\right) = \sum_{n \geq 0} z^n u^{-(n+1)}$$

La série converge absolument. On a donc :

$$\phi\left((u - z\mathrm{Id})^{-1}\right) = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} z^n \phi(u^{-(n+1)})\right)$$

Puisque ϕ est continue, il existe $C > 0$ tel que, pour toute $f \in \mathcal{L}_c(E)$, $|\phi(f)| \leq C|||f|||$. Alors, pour tout n, $|z^n \phi(u^{-(n+1)})| \leq C|||u^{-1}|||^{n+1}|z|^n$. La série de l'équation précédente converge donc lorsque $|z| < \frac{1}{|||u^{-1}|||}$ et on a donc :

$$\zeta(z) = \sum_{n \geq 0} z^n \phi(u^{-(n+1)})$$

2. La fonction u n'est pas nulle (sinon son spectre serait $\{0\}$, donc non-vide). Donc u^{-1} n'est pas non plus la fonction nulle.
D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $\phi : \mathcal{L}_c(E) \to \mathbb{C}$ une application linéaire continue telle que $\phi(u^{-1}) \neq 0$.
Définissons ζ comme à la question précédente. Il s'agit d'une fonction développable en série entière en tout point telle que $\zeta(z) \to 0$ lorsque $|z| \to +\infty$. D'après le lemme, elle est identiquement nulle. C'est impossible car $\zeta(0) = \phi(u^{-1}) \neq 0$.
3. a) Si W est identiquement nulle, c'est clair. Sinon, soit $m_0 = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}}|W(z)| > 0$. Il existe $R > 0$ tel que, si $|z| > R$, alors $|W(z)| \leq m_0/2$.
Pour un tel R, on a $m_0 = \sup\limits_{|z|\leq R}|W(z)|$. Puisque $\overline{B}(0, R)$ est un compact de $\mathbb{C}$ et $|W|$ est continue, $|W|$ atteint sa borne supérieure, c'est-à-dire m_0, sur $\overline{B}(0, R)$. Donc le maximum de $|W|$ est atteint.
b) On note $W(z) = \sum\limits_n a_n(z - z_0)^n$ sur un certain voisinage de z_0. On veut montrer que tous les a_n sont nuls pour $n \geq 1$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Soit N le plus petit entier strictement positif tel que $a_N \neq 0$.
Alors $W(z) = a_0 + a_N(z - z_0)^N + o(|z - z_0|^N)$ en z_0. Puisque $|W(z_0)| = m_0$, $a_0 = m_0e^{i\theta_0}$ pour un certain réel θ_0.
Posons $a_N = \rho e^{i\theta_N}$, avec ρ, θ_N deux réels tels que $\rho > 0$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, $W(z_0 + te^{i(\theta_0-\theta_N)/N}) = e^{i\theta_0}(m_0 + t^N\rho) + o(t^N)$. On a donc $|W(z_0 + te^{i(\theta_0-\theta_N)/N})| = m_0 + t^N\rho + o(t^N)$. Lorsque t est strictement positif mais assez proche de 0 :

$$|W(z_0 + te^{i(\theta_0-\theta_N)/N})| > m_0$$

C'est en contradiction avec la définition de m_0.
c) Soit x un point où $|W|$ atteint son maximum. On pose $y_0 = W(x)$. C'est un complexe tel que $|y_0| = m_0$. Soit $A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } W(z) = y_0\}$.
C'est un ensemble fermé car W est une fonction continue. D'après la question b), c'est aussi un ouvert de $\mathbb{C}$. C'est un ensemble non-vide. Puisque $\mathbb{C}$ est connexe, on doit avoir $A = \mathbb{C}$.
La fonction W est donc constante en y_0. Comme elle tend vers 0 en ∞, $y_0 = 0$ et W est la fonction nulle.

Exercice 6

1. L'équation n'est pas bien définie si $p(t) < 0$ (sauf pour les valeurs entières de k). Pour contourner ce problème, on va considérer l'équation suivante, un peu différente, qui est elle bien définie même si p prend des valeurs strictement négatives :

$$\begin{aligned} n'(t) + n(t) &= |p(t)|^k \qquad\qquad (*) \\ p'(t) + |p(t)|^k &= n(t) \end{aligned}$$

La fonction $(n, p) \to (|p|^k - n, n - |p|^k)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc localement lipschitzienne. L'équation $(*)$ admet donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, une unique solution maximale.
Soit $I =]a; b[$ l'intervalle de définition de cette solution.

Lemme 6.1. *Pour tout* $t \in [0; b[$, $p(t) > 0$ *et* $n(t) > 0$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on suppose que ce n'est pas le cas. Soit $E = \{t \in [0; b[\text{ tq } p(t) \leq 0 \text{ ou } n(t) \leq 0\}$. C'est un fermé non-vide. Soit t_0 son élément minimal.
Par continuité de (n, p), on a $p(t_0) = 0$ ou $n(t_0) = 0$, et $p(t_0) \geq 0, n(t_0) \geq 0$.
On ne peut pas avoir $p(t_0) = n(t_0) = 0$. En effet, sinon, par unicité de la solution à condition initiale fixée en t_0, (p, n) doit être égale à la fonction identiquement nulle.
On a donc $p(t_0) = 0$ et $n(t_0) > 0$ ou l'inverse.
Si $p(t_0) = 0$ et $n(t_0) > 0$, alors $p'(t_0) > 0$. Donc, pour $\epsilon > 0$ assez petit, $p(t_0 - \epsilon) < p(t_0) = 0$. Donc $t_0 - \epsilon \in E$, ce qui est absurde car $t_0 = \min E$.
De même, si $p(t_0) > 0$ et $n(t_0) = 0$, on a $n'(t_0) > 0$ donc, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, $t_0 - \epsilon \in E$, ce qui est absurde.
Dans tous les cas, on obtient une contradiction. □

La fonction $n + p$ est constante. En effet, $n'(t) + p'(t) = |p(t)|^k - n(t) + n(t) - |p(t)|^k = 0$. Pour tout $t \in [0; b[$, on a donc $n(t) + p(t) = n_0 + p_0$. Comme on vient de voir que $n(t) > 0$ et $p(t) > 0$, on a aussi $n(t) < n_0 + p_0$ et $p(t) < n_0 + p_0$. La solution (n, p) de l'équation $(*)$ est donc bornée au voisinage de b.
Cela implique, par le théorème de sortie des compacts, que $b = +\infty$.
La solution (n, p) de $(*)$, restreinte à $\mathbb{R}^+$, est une solution du système d'équations original, puisqu'elle reste dans $\mathbb{R}_+^*$. On a donc démontré l'existence.
L'unicité est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz, appliqué à l'équation originale.

2. Posons $M = n_0 + p_0$. On a vu au cours de la question précédente qu'on avait $n(t) + p(t) = M$ pour tout $t \geq 0$.
Soit $\phi : [0; M] \to \mathbb{R}$ la fonction $\phi(x) = (M - x)^k$. Elle est strictement décroissante et continue. De plus, $\phi(0) > 0$ et $\phi(M) < M$. Il existe donc $x_0 \in]0; M[$ tel que :

$$\begin{aligned} \phi(x) &> x \text{ si } x < x_0 \\ &= x \text{ si } x = x_0 \\ &< x \text{ si } x > x_0 \end{aligned}$$

S'il existe t_0 tel que $n(t_0) = x_0$, alors $p(t_0) = M - x_0$ et, comme la solution constante $t \to (x_0, M - x_0)$ est solution de l'équation différentielle, cela implique que p et n sont constantes. En particulier, elles convergent, et à vitesse exponentielle.
Supposons maintenant que p et n ne sont pas constantes. D'après le raisonnement qu'on vient de faire, n ne prend pas la valeur x_0. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, soit $n(t) > x_0$ pour tout t, soit $n(t) < x_0$ pour tout t.
Supposons $n(t) > x_0$ pour tout t. Alors, pour tout t :

$$n'(t) = -n(t) + p(t)^k = -n(t) + \phi(n(t)) < 0$$

La fonction n est donc strictement décroissante. Comme elle est minorée, elle converge vers une limite n_∞. Puisque $n + p$ est constante, p converge également.

Puisque $n'(t) = -n(t) + \phi(n(t))$ et puisque ϕ est continue, le fait que n converge implique que n' converge également (vers $-n_\infty + \phi(n_\infty)$). La limite de n' doit être nulle (sinon n diverge) donc $n_\infty = x_0$ et $p_\infty = M - x_0$.

Montrons maintenant que la convergence est exponentielle.

Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x > x_0$, $\phi(x) - x < -\alpha(x - x_0)$. En effet, l'application $x \to \frac{\phi(x)-x}{x-x_0}$ est continue et strictement négative sur $[x_0; M]$ (si on la prolonge par $-k(M-x_0)^{k-1} - 1$ en x_0). Elle est donc majorée par une certaine constante strictement négative.

Alors, pour tout t :

$$n'(t) < -\alpha(n(t) - x_0)$$

donc :

$$\log(n - x_0)'(t) < -\alpha$$

ce qui implique qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout t :

$$\log(n - x_0)(t) \leq C - \alpha t \qquad \Rightarrow \qquad n(t) - x_0 \leq e^C e^{-\alpha t}$$

donc la convergence de n est exponentielle. Puisque $p = M - n$, la convergence de p est également exponentielle.

On peut appliquer le même raisonnement si $n(t) < x_0$ pour tout t.

Exercice 7

Commençons par le cas où $y(t)$ est de signe constant pour $t \geq t_0$, avec t_0 assez grand. Quitte à multiplier par -1, on peut supposer que $y(t) \geq 0$ pour tout $t \geq t_0$. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $y''(t) = -q(t)y(t) \leq 0$, c'est-à-dire que y' est décroissante.

Si $y'(t) \leq 0$ pour un $t \geq t_0$, alors $y'(t) \leq 0$ pour tout t assez grand. Dans ce cas, y est positive et décroissante à partir d'un réel assez grand. Elle converge donc, ce qui implique qu'elle est bornée.

Dans le cas contraire, on a $y'(t) > 0$ pour tout $t \geq t_0$. Mais alors y est strictement croissante. Il existe donc m tel que $y(t) \geq m$ pour tout t assez grand. Alors $y''(t) \leq -q(t_0)m$ pour tout t assez grand. On doit donc avoir $y'(t) \leq c - q(t_0)mt$ pour tout t assez grand (pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$). Mais alors y' ne reste pas positive. C'est absurde.

On a donc démontré que, si y restait de signe constant à partir d'un certain point, alors y était bornée. Supposons maintenant que ce n'est pas le cas.

L'ensemble S des zéros de y dans $\mathbb{R}^+$ est donc infini. Il ne contient pas de point d'accumulation car, en un point d'accumulation t_0, on doit avoir $y'(t_0) = y(t_0) = 0$, ce qui implique que y est la fonction identiquement nulle, par unicité des solutions à condition initiale fixée (on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz car q est de classe $\mathcal{C}^1$).

Il existe donc une suite strictement croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que $S = \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, avec y de signe constant sur $]t_n; t_{n+1}[$ pour tout n.

Lemme 7.1. *Soit $]a; b[$ un intervalle sur lequel y ne s'annule pas, tel que $y(a) = y(b) = 0$. Notons M le maximum de $|y|$ sur $]a; b[$. Alors :*

$$M \leq \frac{|y'(a)|}{\sqrt{q(a)}} \quad \textit{et} \quad M \geq \frac{|y'(b)|}{\sqrt{q(a)}}$$

Démonstration. Quitte à multiplier y par -1, on peut supposer quer y est positive sur $]a;b[$. Soit $t_0 \in]a;b[$ tel que $y(t_0) = M$; on a $y'(t_0) = 0$.
Sur $[a;b]$:

$$y''(t) + q(a)y(t) = (q(a) - q(t))y(t) \leq 0$$

ce qui implique, en multipliant par $2y'(t)$:

$$(y'^2)'(t) + q(a)(y^2)'(t) \leq 0$$

La fonction $y'^2 + q(a)y^2$ est donc décroissante.

$$y'(a)^2 = y'(a)^2 + q(a)y(a)^2 \geq y'(t_0)^2 + q(a)y(t_0)^2 = q(a)M^2$$
$$\text{et } q(a)M^2 = y'(t_0)^2 + q(a)y(t_0)^2 \geq y'(b)^2 + q(a)y(b)^2 = y'(b)^2$$

□

D'après ce lemme, si on note M_n le maximum de $|y|$ sur $]t_n;t_{n+1}[$, on a :

$$M_n \geq \frac{|y'(t_{n+1})|}{\sqrt{q(t_n)}} \quad \text{et} \quad M_{n+1} \leq \frac{|y'(t_{n+1})|}{\sqrt{q(t_{n+1})}}$$

donc, puisque q est croissante :

$$M_{n+1} \leq M_n \frac{\sqrt{q(t_n)}}{\sqrt{q(t_{n+1})}} \leq M_n$$

Ainsi, $|y|$ est majorée par M_0 sur $]t_0;+\infty[$, ce qui entraîne que y est bornée.

Exercice 8
Soit $U = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } f \text{ est polynomiale sur un voisinage de } x\}$.

Lemme 8.1. *Si I est une composante connexe de U, alors f est polynomiale sur I.*

Démonstration. Soit $x_0 \in I$ quelconque. Soit P un polynôme qui coïncide avec f sur un voisinage de x_0. Notons $\Omega = \{x \in I \text{ tq } f \equiv P \text{ sur un voisinage de } x\}$.
L'ensemble Ω est ouvert dans I. Montrons qu'il est également fermé. Par connexité de I, on aura alors $\Omega = I$ donc $f \equiv P$ sur I.
Soit a appartenant à l'adhérence de Ω dans I. Puisque $a \in U$, il existe un polynôme Q qui coïncide avec f sur un voisinage de a. Ce voisinage de a est d'intersection non-vide avec Ω donc, puisque Ω est un ouvert (de I est donc de $\mathbb{R}$, car I est un ouvert de $\mathbb{R}$), le voisinage de a contient un nombre infini de points de Ω.
Donc Q et P sont deux polynômes égaux en un nombre infini de points. Alors $Q = P$ et $a \in \Omega$. □

Lemme 8.2. $\mathbb{R} - U$ *n'a pas de point isolé.*

Démonstration. Soit par l'absurde $x_0 \in \mathbb{R} - U$ un point isolé et $\epsilon > 0$ tel que $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[\cap (\mathbb{R} - U) = \{x_0\}$.
Notons $E_1 =]x_0 - \epsilon; x_0[$ et $E_2 =]x_0; x_0 + \epsilon[$. Ce sont deux ensembles connexes inclus dans U. D'après la question précédente, la fonction f est donc polynomiale sur E_1 et polynomiale sur E_2.
Notons P_1 et P_2 les polynômes qui coïncident avec f respectivement sur E_1 et E_2. Puisque $f - P_1$ est identiquement nulle sur E_1 et de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f - P_1$ et toutes ses dérivées sont nulles en x_0.
Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 = f^{(k)}(x_0) - P_1^{(k)}(x_0) = \lim\limits_{y \to x_0^+} f^{(k)}(y) - P_1^{(k)}(y) = P_2^{(k)}(x_0) - P_1^{(k)}(x_0)$.
Le polynôme $P_2 - P_1$ est donc nul en x_0, ainsi que toutes ses dérivées.
Un polynôme qui admet une racine de multiplicité infinie en un point est identiquement nul. Donc $P_2 = P_1$.
Donc f coïncide avec P_1 sur E_1 et E_2. Par continuité, on a aussi $f(x_0) = P_1(x_0)$. Donc f est polynomiale sur tout un voisinage de x_0. Donc $x_0 \in U$. C'est absurde. □

Lemme 8.3. *$U = \mathbb{R}$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Posons $F = \mathbb{R} - U$. C'est un fermé de $\mathbb{R}$ donc un ensemble complet.
Pour tout n, on note $F_n = \{x \in F \text{ tq } f^{(n)}(x) = 0\}$. Par hypothèse, $F = \bigcup\limits_n F_n$. Puisque les F_n sont fermés, le théorème de Baire assure que l'un d'entre eux au moins n'est pas d'intérieur vide dans F.
Soit alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in \mathring{F}_{n_0}$ et soit $\epsilon > 0$ tel que $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[\cap F \subset F_{n_0}$.
Montrons que, pour tout $x \in]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$, $f^{(n_0)}(x) = 0$.
Si $x \in]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[\cap F$, $x \in F_{n_0}$ donc $f^{(n_0)}(x) = 0$.
Sinon, $x \in U$. Soit $]a; b[$ la composante connexe de U qui contient x. Puisque $]a; b[$ est d'intersection non-vide avec $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$ mais ne contient pas tout $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$, a ou b appartient à $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$. Supposons que $a \in]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$ (le raisonnement serait identique si c'était b qui appartennait à $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$).
Puisque $a \notin U$, $a \in F$ donc il existe (car, par le lemme précédent, a n'est pas un point isolé de F) une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F tous distincts, qui converge vers a. Pour tout n assez grand, $a_n \in]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[\cap F \subset F_{n_0}$.
Pour tout $k \geq n_0$, $f^{(k)}(a) = 0$. En effet, sinon, il existe $l \geq 0, \alpha \neq 0$ tels que $f^{(n_0)}(a + t) = \alpha t^l + o(t^l)$ pour $t \to 0$ (d'après Taylor-Young, puisque la fonction $f^{(n_0)}$ est $\mathcal{C}^\infty$).
On doit donc avoir, pour tout n assez grand, $0 = f^{(n_0)}(a_n) = \alpha(a_n - a)^l + o((a_n - a)^l)$. C'est impossible.
Puisque f est polynomiale sur $]a; b[$ (d'après le premier lemme) et puisque $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \geq n_0$, f est un polynôme de degré strictement inférieur à n_0 sur $]a; b[$. Donc $f^{(n_0)} \equiv 0$ sur $]a; b[$. En particulier, $f^{(n_0)}(x) = 0$.
On a donc démontré que $f^{(n_0)} \equiv 0$ sur $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$. Donc f est polynomiale sur cet intervalle, de degré strictement inférieur à n_0. Donc $x_0 \in U$ et $x_0 \notin F$. C'est absurde. □

D'après le troisième lemme, $\mathbb{R}$ est une composante connexe de U. D'après le premier lemme, f est donc polynomiale sur $\mathbb{R}$.