 

# Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$13

**Exercice 1**
Si $f = (f_1, ..., f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on rappelle que l'opérateur de divergence est défini par :

$$\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f_i$$

Soit $\phi^{t_0}$ le flot associé à une équation différentielle $u' = f(t,u)$ sur $\mathbb{R}^n$, avec $f$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f$ vérifie :

$$\operatorname{div}_x f(t,x) = 0 \quad \forall t, x$$

Montrer alors que la différentielle du flot par rapport à $x$ est de déterminant 1.

**Exercice 2 : équation de transport**
Soit $A(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $||A||_\infty < +\infty$.
Soit $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On considère l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t f + \langle A(t,x), \nabla_x f \rangle = 0 \\ f_{t=0} = f_0 \end{cases}$$

où l'inconnue est une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1. Trouver une formule exprimant $f$ en fonction de $f_0$ et du flot associé à une autre équation différentielle, ne faisant pas intervenir $f_0$.

2. Pourquoi cette équation s'appelle-t-elle « équation de transport » ?

**Exercice 3 : une étude de systèmes différentiels**
Soit $\lambda > 1$. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x - x e^{x^2+y^2} \\ \dot{y} = \lambda y - y e^{x^2+y^2} \end{cases}$$

1. Étudier l'existence, l'unicité et la régularité en $(t, \lambda)$ des solutions maximales pour toute donnée initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. On notera $I_{(x_0,y_0)}$ l'intervalle maximal correspondant.

2. Déterminer les solutions stationnaires (c'est-à-dire constantes en temps).

3. Montrer (à l'aide des coordonnées polaires, par exemple) que les courbes intégrales sont des portions de droite.

4. Lorsque $x_0^2+y_0^2 < \ln\lambda$, montrer que la solution est de norme strictemente croissant et globale, c'est-à-dire $I_{(x_0,y_0)} = \mathbb{R}$.

5. Lorsque $x_0^2+y_0^2 > \ln\lambda$, montrer qu'il y a explosion du côté des $t$ négatifs uniquement, c'est-à-dire $I_{(x_0,y_0)} = ]-T^*;+\infty[$.
[Indication : vérifier que, pour $t \leq 0$, il existe $C > 0$ (dépendant de $x_0^2+y_0^2$) tel que $\dot{r} \leq -Cr^2$, où $r = ||(x,y)||$.]

6. Quelles sont les valeurs limites possibles pour la norme lorsque $t \to \pm\infty$ ? Déterminer ces limites dans les différents cas.

7. Tracer les courbes intégrales dans le plan $(x,y)$.

**Exercice 4 : théorème de Hadamard**

Ce théorème énonce que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors il y a équivalence entre :

1. $f$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.
2. $f$ est propre et $df(x)$ est de déterminant non nul pour tout $x$ (c'est-à-dire inversible pour tout $x$).

[On dit qu'une application est propre si l'image réciproque de tout compact est un compact.]
On veut démontrer l'équivalence précédente dans le cas où $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que (1) implique (2), puis que (2) implique que $f$ est surjective (par un argument de connexité).

2. On suppose désormais que $f$ vérifie (2). Soit $z \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = f(z)\}$ est fini.

3. Montrer que les solutions du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -(df(x))^{-1} \cdot \big(f(x) - f(z)\big) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

sont bien définies sur $[0,+\infty[$, puis que $f$ est injective. Conclure.

**Exercice 5**

Soit $(E)$ l'équation $x'(t) = f(x(t))$, avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitzienne. Soit $\Phi_t$ le flot associé. Pour tout $x_0$, on appelle *orbite* de $x_0$ et on note $\mathrm{Orb}(x_0)$ l'ensemble des $\Phi_t(x_0)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$. On appelle ensemble $\omega$-limite de $x_0$ l'ensemble :

$$\omega(x_0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\Phi_s(x_0), s \geq t\}}$$

1. Montrer que si $\mathrm{Orb}(x_0)$ est bornée, alors $\omega(x_0)$ est un compact non-vide, connexe et invariant (c'est-à-dire $\Phi_t(\omega(x_0)) = \omega(x_0)$ pour tout $t$).

2. Montrer que si $f$ est de la forme $\nabla g$ pour une certaine fonction $g$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\Phi_t$ n'a pas d'orbites périodiques autres que les solutions stationnaires.

3. On suppose qu'il existe une fonction de Lyapunov « stricte » pour le système $(E)$, c'est-à-dire une fonction $\psi$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla\psi(x), f(x)\rangle < 0 \quad \text{sauf si } f(x) = 0$$

et, pour tout $M$, l'ensemble $\{\psi(x) \leq M\}$ est compact.
a) Montrer que les solutions maximales de $(E)$ sont définies sur des intervalles non-majorés.
b) Montrer que $\psi$ est constante sur $\omega(x_0)$, pour tout $x_0$.
c) On suppose que les points où $f$ s'annule sont isolés. Montrer que si $\Phi_{t_n}(x_0)$ est une suite convergente (avec $t_n \to +\infty$), alors elle converge vers un zéro de $f$.
d) Sous la même hypothèse qu'à la question c), montrer que toute trajectoire converge vers un zéro de $f$.