École Normale Supérieure — Topologie, analyse et calcul différentiel
8 janvier 2015

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$13

Corrigé

Exercice 1

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (avec régularité par rapport aux conditions initiales), puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, le flot est uniquement défini et la fonction $\psi : (t,x) \to \phi^t(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
On a $\partial_t \psi(t,x) = f(t, \psi(t,x))$.
Comme f est $\mathcal{C}^1$ et ψ aussi, $\partial_t \psi(t,x)$ est $\mathcal{C}^1$ et vérifie :

$$d_x \partial_t \psi(t,x) = d_x f(t, \psi(t,x)) \circ d_x \psi(t,x)$$

Donc $d_x \psi$ est différentiable par rapport à t et sa différentielle vérifie :

$$\partial_t d_x \psi(t,x) = d_x f(t, \psi(t,x)) \circ d_x \psi(t,x)$$

On a vu dans un TD antérieur que le déterminant était une application différentiable, de différentielle $d \det(M).H = \det(M) \mathrm{Tr}(HM^{-1})$ si M est inversible.
Notons $g(t,x) = \det(d_x \psi(t,x))$. En tout point où g n'est pas nulle :

$$\begin{aligned}
\partial_t g(t,x) &= g(t,x) \mathrm{Tr}(\partial_t d_x \psi(t,x)(d_x \psi(t,x))^{-1}) \\
&= g(t,x) \mathrm{Tr}(d_x f(t, \psi(t,x)) d_x \psi(t,x)(d_x \psi(t,x))^{-1}) \\
&= g(t,x) \mathrm{Tr}(d_x f(t, \psi(t,x))) \\
&= g(t,x) \mathrm{div}\, f(t, \psi(t,x)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme $g(0,x) = 1$ pour tout x, cela implique que g est constante égale à 1.
Donc $\det(d\phi^t(x)) = g(t,x) = 1$ pour tous t, x.

Exercice 2

1. Considérons l'équation (E_0) suivante :

$$X'(t) = A(t, X(t))$$

Puisque A est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à (E_0) : pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $t_0 \in \mathbb{R}$, (E_0) a une unique solution qui vérifie $X(t_0) = x_0$. Comme A est bornée, cette solution est nécessairement définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (c'est une conséquence du théorème de sortie des compacts).

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note X_x la solution de (E_0) qui vaut x en $t = 0$.
Supposons que f est une solution de l'équation qui nous intéresse et considérons, pour un x quelconque, la fonction $g : t \to f(t, X_x(t))$.
Alors $g'(t) = \partial_t f(t, X_x(t)) + \langle X_x'(t), \nabla_x f(t, X_x(t))\rangle = \partial_t f(t, X_x(t)) + \langle A(t, X(t)), \nabla_x f(t, X_x(t))\rangle = 0$. Donc g est constante et $g(t) = f_0(x)$ pour tout t.
D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz avec régularité par rapport aux conditions initiales, $(t, x) \to \phi_t(x)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout t, ϕ_t est une bijection et sa différentielle par rapport à x est inversible (en effet, pour tout h, $d_x\phi_t(x).h$ est solution d'une équation différentielle dont 0 est solution stationnaire ; comme $d_x\phi_t(x).h \neq 0$ pour $t = 0$, cette fonction ne s'annule pour aucun t).
Donc $(t, x) \to (t, \phi_t(x))$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ vers lui-même. Sa réciproque $(t, x) \to (t, \phi_t^{-1}(x))$ est donc également de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui implique que $(t, x) \to \phi_t^{-1}(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Si f est une solution de l'équation aux dérivées partielles, on doit avoir $f(t, x) = f(t, \phi_t(\phi_t^{-1}(x))) = f_0(\phi_t^{-1}(x))$.
Réciproquement, la fonction $f : (t, x) \to f_0(\phi_t^{-1}(x))$ est solution de l'équation aux dérivées partielles. En effet, avec cette définition, on a bien $f(0, x) = f_0(x)$. De plus, $g : t \to f(t, \phi_t(x))$ est constante (de valeur $f_0(x)$) pour tout x, ce qui implique :

$$\partial_t g = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \partial_t f(t, \phi_t(x)) + \langle A(t, \phi_t(x)), \nabla_x f(t, \phi_t(x))\rangle = 0$$

Puisque ϕ_t est une bijection pour tout t, la fonction f vérifie :

$$\forall t, \forall x \quad \partial_t f(t, x) + \langle A(t, x), \nabla_x f(t, x)\rangle = 0$$

2. Cette équation s'appelle équation de transport car la solution f est égale à f_0, « transportée » par le flot associé à l'équation (E_0).

Exercice 3

1. On considère une équation de la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X, \lambda) \\ X(0) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

où $X = (x, y)$ et $F(x, y, \lambda) = (\lambda x - xe^{x^2+y^2}, \lambda y - ye^{x^2+y^2})$.
La fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations avec paramètre, ce système admet une unique solution maximale $X_\lambda(t)$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en (t, λ).
2. Une solution est stationnaire si et seulement si $\dot{x} = \dot{y} = 0$ sur tout l'ensemble de définition. En particulier, en 0, il faut qu'on ait :

$$0 = \lambda x_0 - x_0 e^{x_0^2+y_0^2}$$
$$0 = \lambda y_0 - y_0 e^{x_0^2+y_0^2}$$

On a donc $x_0 = y_0 = 0$ ou $\lambda = e^{x_0^2+y_0^2}$, c'est-à-dire $x_0 = y_0 = 0$ ou $x_0^2 + y_0^2 = \ln\lambda$.
Dans chacun de ces deux cas, la fonction $t \to (x_0, y_0)$ est solution de l'équation différentielle avec la condition initiale voulue. Comme la solution de l'équation différentielle est unique, c'est l'unique solution et elle est bien stationnaire.

3. Considérons une solution (x, y) qui n'est pas stationnaire. Alors il n'existe pas t tel que $x(t) = y(t) = 0$ (sinon (x, y) est la solution nulle). Donc, pour tout t, il existe $r(t) \in \mathbb{R}_+^*, \theta(t) \in \mathbb{R}$ tels que $(x(t), y(t)) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))$; $r(t)$ est unique et $\theta(t)$ est unique modulo 2π. Comme $(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, r est aussi $\mathcal{C}^\infty$ et on peut choisir θ de sorte que ce soit également une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Alors r et θ vérifient l'équation différentielle suivante :

$$\dot{r}\cos\theta - \dot{\theta}r\sin\theta = \lambda r\cos\theta - r\cos\theta e^{r^2}$$
$$\dot{r}\sin\theta + \dot{\theta}r\cos\theta = \lambda r\sin\theta - r\sin\theta e^{r^2}$$

En multipliant la première équation par $\cos\theta$, la deuxième par $\sin\theta$ puis en additionnant les deux, on obtient :

$$\dot{r} = \lambda r - re^{r^2}$$

En remplaçant $\dot{r}$ par $\lambda r - re^{r^2}$ dans le couple d'équations précédent, on obtient :

$$\dot{\theta}r\sin\theta = \dot{\theta}r\cos\theta = 0$$

et comme r ne s'annule pas, on a $\dot{\theta} = 0$.
Ainsi, toute solution non-stationnaire de l'équation différentielle considérée est à images dans la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0, 0)$ et (x_0, y_0). Son module $r(t)$ satisfait l'équation :

$$\dot{r} = \lambda r - re^{r^2}$$

4. Soit $(x(t), y(t))$ la solution maximale de l'équation pour des conditions initiales (x_0, y_0) telles que $x_0^2 + y_0^2 < \ln\lambda$. D'après ce qu'on a vu à la deuxième question, on ne peut pas avoir $x^2(t) + y^2(t) = \ln\lambda$ pour un certain t, sinon (x, y) serait stationnaire.
On a donc nécessairement $x^2(t) + y^2(t) < \ln\lambda$ pour tout t, ce qui implique $\dot{r} > 0$ sur l'intervalle de définition de la solution. Le module de la solution est donc bien strictement croissant.
De plus, le module de la solution reste dans le segment $[0; \sqrt{\ln\lambda}]$. La solution est donc bornée.
Par le théorème de sortie des compacts, elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5. De même qu'à la question précédente, le module r de la solution maximale est strictement décroissant. La solution maximale est donc bornée sur $I_{(x_0,y_0)} \cap \mathbb{R}^+$. D'après le théorème de sortie des compacts, son intervalle de définition n'est pas majoré.
Montrons maintenant que l'intervalle de définition est minoré.
Soit $c > 0$ tel que $r^2(0) = \ln\lambda + c$. Puisque r est décroissante, $r^2(t) \geq \ln\lambda + c$ pour tout $t \leq 0$.
Donc :

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) &\leq e^{r^2(t)-c}r(t) - r(t)e^{r^2(t)}\\ &= -e^{r^2(t)}r(t)(1 - e^{-c})\\ &\leq -e^{r^2(t)}r(0)(1 - e^{-c})\\ &\leq -r^2(t)r(0)(1 - e^{-c})\end{aligned}$$

Donc, si on pose $C = r(0)(1 - e^{-c})$, on a $\dot{r}(t) \leq -Cr^2(t)$ pour tout $t \leq 0$.
Cela implique $(1/r)'(t) \geq C$, donc, pour tout $t \leq 0$:

$$\frac{1}{r(t)} \leq \frac{1}{r(0)} - Ct$$

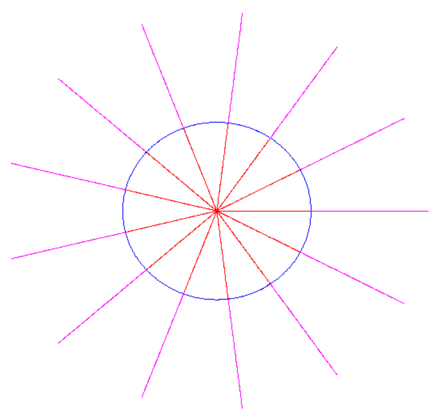
Comme r est toujours positif, $r(t)$ ne peut pas être définie sur $\mathbb{R}$. Son intervalle de définition est minoré.

6. Si la solution est stationnaire, r est constante en 0 ou $\sqrt{\ln \lambda}$. En particulier, on a convergence vers ces valeurs en $\pm\infty$.
Si $r^2(0) < \ln \lambda$, on a vu que r était strictement croissante et appartenait à $[0; \sqrt{\ln \lambda}]$ pour tout t. Donc r converge en $-\infty$ et $+\infty$, vers des limites r_- et r_+. À cause de l'équation vérifiée par $\dot{r}$, $\dot{r}$ converge également, vers $\lambda r_- - r_- e^{r_-^2}$ et $\lambda r_+ - r_+ e^{r_+^2}$.
La limite de $\dot{r}$ doit être 0 (sinon r n'est pas bornée), donc r_- et r_+ valent soit 0, soit $\sqrt{\ln \lambda}$. À cause de la stricte croissance de r :

$$r_- = 0 \qquad r_+ = \sqrt{\ln \lambda}$$

Le même raisonnement dans le cas où $r^2(0) > \ln \lambda$ montre que r tend vers $\sqrt{\ln \lambda}$ en $+\infty$. En $-T^*$, par le théorème de sortie des compacts, $r \to +\infty$.

7.



Les lignes rouges et mauves représentent les lignes intégrales, orientées vers le cercle bleu (centré en 0 et de rayon $\sqrt{\ln \lambda}$). Chaque point du cercle ainsi que l'origine représente à lui seul une ligne intégrale.

Exercice 4

1. Si (1) est vraie, alors $df(x)$ est inversible pour tout x car $df^{-1}(f(x)) \circ df(x) = \mathrm{Id}$ pour tout x.
De plus, pour tout K compact, $f^{-1}(K)$ est l'image du compact K par l'application continue f^{-1} donc est compacte. Donc f est propre.
On a donc montré que (1) impliquait (2).

Supposons maintenant que (2) est vérifiée. Alors son image est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. En effet, puisque $df(x)$ est inversible pour tout x, f est un difféomorphisme local, d'après le théorème d'inversion locale.
Le fait que f est propre implique que l'image de f est fermée. En effet, si $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : $\{y\}\cup\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un compact donc son antécédant par f est également un compact, donc un ensemble borné. On peut donc, quitte à extraire, supposer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite x_∞. Par continuité de f, $y = f(x_\infty)$.

2. Il s'agit d'un ensemble compact, puisque f est propre et $\{f(z)\}$ est compact.
De plus, tous les points de S sont isolés car f est un difféomorphisme local (d'après le théorème d'inversion locale).
Cela implique que S est fini. En effet, si ce n'est pas le cas, on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de S tous différents. Cette suite n'admet pas de sous-suite convergente dans S (puisqu'une suite non-stationnaire ne peut pas converger vers un point isolé d'un ensemble), ce qui est en contradiction avec la compacité de S.

3. Le système admet une unique solution maximale puisque $x \to -(df(x))^{-1}.(f(x) - f(z))$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $]a; b[$ son intervalle de définition.
Montrons que $b = +\infty$.
Remarquons que $f(x)' = df(x).\dot{x} = f(z) - f(x)$. Donc $t \to f(x(t))$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre qu'on sait résoudre.
Puisque $f(x(0)) = f(x_0)$, on doit avoir, pour tout $t \in [0; b[$:

$$f(x(t)) = f(z) + (f(x_0) - f(z))e^{-t}$$

Donc $f(x)$ est bornée sur $[0; b[$ et x est bornée aussi (puisque f est propre) et $\dot{x}$ aussi. Par le théorème de sortie des compacts, $b = +\infty$.

Lemme 4.1. *Soit $z_0 \in S$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que, si $||x_0 - z_0|| < \epsilon$, alors la solution x de l'équation différentielle converge vers z_0 en $+\infty$.*

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r)$ ne contienne pas d'autre élément de S que z_0.
Soit m le minimum de $||f(x) - f(z_0)||$ sur l'ensemble des x tels que $||x - z_0|| = r$.
Soit $\epsilon \in]0; r[$ tel que, pour tout $x_0 \in B(z_0, \epsilon)$, $||f(x_0) - f(z_0)|| < m$. Alors, pour tout $x_0 \in B(z_0, \epsilon)$, la solution x vérifie, pour tout $t \geq 0$:

$$||f(x(t)) - f(z)|| = ||f(x_0) - f(z)||e^{-t} \leq ||f(x_0) - f(z)|| < m$$

Donc on n'a jamais $||x(t) - z_0|| = r$. Cela implique que $x(t) \in B(z_0, r)$ pour tout $t \geq 0$.
Comme $f(x(t)) \to f(z)$ lorsque $t \to +\infty$ et comme z_0 est le seul point de $\overline{B}(z_0, r)$ où $f(z_0) = f(z)$, cela implique que $x(t) \to z_0$. En effet, si V est un voisinage ouvert quelconque de z_0, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \overline{B}(z_0, r) - V$, $||f(z_0) - x|| \geq \alpha$. Puisque $||f(z_0) - x(t)|| < \alpha$ pour tout t assez grand, $x(t) \in V$ pour tout t assez grand. □

Corollaire 4.2. *Quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la solution x de l'équation différentielle pour la condition initiale x_0 converge vers un élément de S en $+\infty$.*

Démonstration. Puisque x est bornée en $+\infty$, $\{x(t) \text{ tq } t \geq 0\}$ admet une valeur d'adhérence. Comme $f(x(t)) \to f(z)$, cette valeur d'adhérence appartient à S.
Notons z_0 cette valeur d'adhérence et soit $\epsilon > 0$ comme au lemme précédent. Soit $t_0 > 0$ tel que $x(t_0) \in B(z_0, \epsilon)$. Alors, d'après le lemme précédent, l'application $t \to x(t_0 + t)$, qui est solution du système différentiel considéré pour la condition initiale $x(t_0 + 0) = x(t_0)$, converge vers z_0. Donc x converge vers z_0. □

Pour tout $z_0 \in S$, on note $A(z_0)$ l'ensemble des x_0 tels que la solution x de l'équation différentielle considérée avec condition initiale x_0 converge vers z_0.
D'après le corollaire précédent, $\mathbb{R}^n = \bigcup_{z_0 \in S} A(z_0)$.
Or, pour tout $z_0 \in S$, $A(z_0)$ est ouvert. En effet, si $x_0 \in A(z_0)$, soit $\epsilon > 0$ comme dans le lemme. Il existe $t_0 > 0$ tel que $x(t_0) \in B(z_0, \epsilon)$ (où x est la solution de l'équation pour la condition initiale x_0). Puisque les solutions de l'équation différentielles varient continument en fonction des conditions initiales, si x_1 est assez proche de x_0, alors $x^1(t_0)$ appartient aussi à $B(z_0, \epsilon)$ (où x^1 est la solution pour condition initiale x_1 au lieu de x_0). Donc, d'après le lemme, x^1 converge vers z_0 en $+\infty$.
Donc $\mathbb{R}^n$ est l'union disjointe des ouverts $A(z_0)$, où l'ensemble des z_0 varie dans S et où chaque $A(z_0)$ est non-vide (car il contient un voisinage de z_0). Puisque $\mathbb{R}^n$ est connexe, cela implique que S ne contient qu'un seul élément.

On a montré que, pour tout z, $\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } f(x) = f(z)\}$ est un singleton. Cela revient à dire que f est injective.
Comme on a vu que f était aussi surjective, f est bijective. De plus, f est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme local, d'après le théorème d'inversion locale, donc f^{-1} est aussi un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme local. Donc f est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme global.

Exercice 5

1. Si l'orbite de x_0 est bornée, alors $\Phi_t(x_0)$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, d'après le théorème de sortie des compacts.
Pour tout $t \geq 0$, notons $K_t = \overline{\{\Phi_s(x_0), s \geq t\}}$. Puisque $\{\Phi_s(x_0), s \geq t\} \subset \mathrm{Orb}(x_0)$ et puisque $\mathrm{Orb}(x_0)$ est borné, K_t est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, donc un compact, pour tout $t \geq 0$.
C'est aussi un ensemble non-vide.
De plus, K_t est connexe pour tout t. En effet, $\{\Phi_s(x_0), s \geq t\}$ est connexe : c'est l'image par une application continue de l'intervalle $[t; +\infty[$, qui est connexe. Comme l'adhérence d'un connexe est connexe, K_t est connexe.
L'ensemble $\omega(x_0)$ est donc une intersection de compacts connexes emboîtés et non-vides. C'est donc un compact non-vide. Il est connexe (pour la démonstration, voir l'exercice 7 du TD 4 ; cet exercice traite le cas d'une intersection dénombrable seulement mais la démonstration s'adapte au cas présent).

Montrons pour finir que $\omega(x_0)$ est invariant.
Nous utiliserons le fait que $\omega(x_0)$ est l'ensemble des $y \in \mathbb{R}^n$ tels qu'il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$ telle que $\Phi_{t_n}(x_0) \to y$.
Si $y \in \omega(x_0)$, alors $y \in \Phi_t(\omega(x_0))$. En effet, si $t_n \to +\infty$ et $\Phi_{t_n}(x_0) \to y$, on peut supposer, quitte à extraire, que $\Phi_{t_n - t}(x_0)$ converge vers une limite z (car cette suite est bornée : elle est

dans l'orbite de x_0). On a alors $z \in \omega(x_0)$ et $\Phi_t(z) = \lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_{t_n}(x_0) = y$ (puisque Φ_t est continue sur son ouvert de définition).
Réciproquement, si $y \in \Phi_t(\omega(x_0))$, alors $y \in \omega(x_0)$. En effet, il existe alors $z \in \omega(x_0)$ tel que $y = \Phi_t(z)$. Si $t_n \to +\infty$ et $\Phi_{t_n}(x_0) \to z$, alors $\Phi_{t_n+t}(x_0) \to y$ donc $y \in \omega(x_0)$.

2. Supposons que x est une solution périodique de l'équation $x'(t) = \nabla g(x(t))$. Notons T la période.
Comme $(g \circ x)'(t) = \langle x'(t), \nabla g(x(t))\rangle = ||\nabla g(x(t))||^2$, on a :

$$g(x(0)) = g(x(T)) = g(x(0)) + \int_0^T ||\nabla g(x(t))||^2 dt$$

donc $\nabla g(x(t)) = 0$ pour tout $t \in [0;T]$. Donc $x'(t) = \nabla g(x(t)) = 0$ pour tout $t \in [0;T]$. La solution x est constante sur $[0;T]$; elle est donc stationnaire.

3. a) Soit x une solution maximale. Pour tout x, $(\psi \circ x)'(t) = \langle \nabla\psi(x(t)), f(x(t))\rangle \leq 0$. Donc $t \to \psi(x(t))$ est décroissante. Puisque $\{y \text{ tq } \psi(y) \leq \psi(x(0))\}$ est borné (car compact), la fonction x est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Par le théorème de sortie des compacts, son intervalle de définition n'est pas majoré.
b) Soit x la solution de (E) telle que $x(0) = x_0$. La fonction $t \to \psi(x(t))$ est décroissante. De plus, elle est minorée sur $\mathbb{R}^+$ car on a vu que x était bornée sur $\mathbb{R}^+$. Elle converge donc vers une limite z.
Pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $\Phi_{t_n}(x_0)$ converge vers une limite y, $\psi(\Phi_{t_n}(x_0)) = \psi(x(t_n)) \to z$. Donc, par continuité de ψ, $\psi(y) = z$.
Ainsi, ψ est égale à z sur $\omega(x_0)$.
c) On garde les notations de la question précédente.
Soit y la limite de $\Phi_{t_n}(x_0)$ quand $n \to +\infty$. Supposons $f(y) \neq 0$. Alors $\langle \nabla\psi(y), f(y)\rangle < 0$.
Alors $\psi(\Phi_1(y)) = \psi(y) + \int_0^1 \langle \nabla\psi(\Phi_t(y)), f(\Phi_t(y))\rangle dt < \psi(y)$. En effet, la fonction $\langle \nabla\psi(\Phi_t(y)), f(\Phi_t(y))\rangle$ est négative sur $[0;1]$ et n'est pas identiquement nulle car elle est strictement négative en 0.
Mais $y \in \omega(x_0)$ et $\Phi_1(y) \in \omega(x_0)$ (par la première question ; en effet, $\text{Orb}(x_0)$ est bornée pour tout x_0, d'après le raisonnement de la question 3.a)). Comme ψ est constante sur $\omega(x_0)$, on doit avoir $\psi(y) = \psi(\Phi_1(y))$. C'est absurde.
d) Soit x une solution de l'équation différentielle. Notons $x_0 = x(0)$. Montrons qu'elle converge vers un zéro de f.
On a vu que x était bornée sur $\mathbb{R}^+$, par une certaine constante M. Comme les zéros de f sont isolés, il existe un nombre fini de zéros sur $\overline{B}(0, M)$. Notons-les $y_0, ..., y_l$.
Soit $r > 0$ tel que $B(y_0, r), ..., B(y_l, r)$ soient disjoints deux à deux. Posons $A = \mathbb{R}^n - \bigcup\limits_{k\leq l} B(y_k, r)$.
Il existe $T > 0$ tel que $x(t) \notin A$ pour tout $t \geq T$. En effet, sinon, il existe (t_n) une suite tendant vers $+\infty$ telle que $\Phi_{t_n}(x_0) \in A$ pour tout n. Quitte à extraire, on peut supposer que cette suite converge vers une limite y (en effet, $\Phi_{t_n}(x_0) = x(t_n) \in \overline{B}(0, M)$ pour tout n donc c'est une suite bornée). D'après la question c), y est un zéro de f. Donc $y = y_k$ pour un certain $k \leq l$. À cause de la définition de A, c'est impossible.
Soit un tel T. Puisque $x(t) \notin A$ pour tout $t \geq T$, il existe $k \leq l$ tel que $x(t) \in B(y_k, r)$ pour tout $t \geq T$.
De même, pour tout $r' < r$, il existe T' et k' tel que $x(t) \in B(y_{k'}, r')$ pour tout $t \geq T'$. On doit avoir $k = k'$, sinon $B(y_{k'}, r')$ et $B(y_k, r)$ sont disjoints, ce qui est absurde.

Donc, pour tout $r' < r$, $x(t) \in B(y_k, r')$ pour tout t assez grand. Donc $x(t) \to y_k$.