# Feuille d'exercices n$^{\rm o}$14

**Exercice 1**

1. On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + \frac{3y^2}{1+4xy} \\ \dot{y} &= -2y\left(\frac{1+xy}{1+4xy}\right) \end{cases}$$

a) Montrer que ce système admet une fonction de Lyapunov forte au voisinage de $(0,0)$. Exhiber une telle fonction.
b) En déduire que, si $(x,y)$ est une solution du système et $(x(0),y(0))$ est assez proche de $(0,0)$, alors $(x(t),y(t)) \to (0,0)$ quand $t \to +\infty$.
c) Tracer approximativement le portrait de phases au voisinage de $(0,0)$.
[Indication : étant donnée une solution $(x,y)$, que peut-on dire de son image par $\phi : (x,y) \to (x+y^2, y-x^2)$ ?]

2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(0,0) = (0,0)$, $Df(0,0) = 0$ et $(0,0)$ est un point stationnaire asymptotiquement stable de $f$.

3. On note $1_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui vaut 0 sur $\mathbb{R}_-^*$ et 1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $f(x,y) = (-2y, 4x^3 1_+(x) + 6x^5)$.
a) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer sa différentielle en $(0,0)$.
b) Montrer que $(0,0)$ est un point stationnaire de l'équation $u' = f(u)$.
c) Dessiner approximativement le portrait de phases autour de $(0,0)$ et montrer que $(0,0)$ n'est pas un point stable.
[Indication : vérifier que $\phi(x,y) = x^4 1_+(x) + x^6 + y^2$ est une intégrale première de $f$.]

4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 0$. On suppose que $Df(0)$ admet une valeur propre réelle strictement positive. Montrer que 0 n'est pas un point stationnaire stable du système $u' = f(u)$.

**Exercice 2 : résolution d'une équation différentielle via le théorème d'inversion locale**

Soit $F = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, et $E$ le sous-espace fermé de $\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions qui s'annulent en 0 et 1, muni de la norme $\|y\|_E = \|y''\|_\infty + \|y'\|_\infty + \|y\|_\infty$. On se donne deux fonctions $h$ et $k$ réelles continues sur $[0,1]$, et on considère l'application $\phi : E \to F$ définie par $\phi(y) = y'' + hy'^2 + ky^2$.

1. Montrer que l'application $\psi : E \times E \to F$ définie par $\psi(y,z) = h \cdot y' \cdot z' + k \cdot y \cdot z$ est bilinéaire continue.

2. Montrer que $\phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $E$ et calculer la différentielle $d\phi(0)$ de $\phi$ en 0.

3. En déduire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour toute fonction $f \in F$ vérifiant $||f||_\infty < \epsilon$, il existe $y \in E$ tel que $\phi(y) = f$, c'est-à-dire une solution de l'équation différentielle $y'' + h(x)y'^2 + k(x)y^2 = f(x)$ qui s'annule en 0 et en 1.

**Exercice 3 : théorème de Poincaré-Bendixson**

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^2)$ un champ de vecteurs. On considère l'équation différentielle suivante :

$$X'(t) = f(X(t)) \tag{$\star$}$$

On suppose que toutes les solutions maximales de ce système sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Pour tout $x_0 \in U$ et tout $s \in \mathbb{R}$, on pose $\phi_s(x_0) = X_{x_0}(s)$, où $X_{x_0}$ est la solution de $(\star)$ telle que $X_{x_0}(0) = x_0$. On appelle $\phi$ le *flot* associé à $(\star)$.
Pour tout $x \in U$, on appelle *ensemble limite de* $x$ l'ensemble suivant :

$$\omega(x) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\{\phi_t(x) \text{ tq } t \geq s\}}$$

[C'est l'ensemble des points d'adhérence de la solution $X$ de $(\star)$ avec condition initiale $x$.]
1. Soit $x \in U$. On suppose qu'il existe $D \subset U$ un compact tel que $\phi_s(x) \in D$ pour tout $s \geq 0$.
a) Montrer que $\omega(x)$ est un compact non-vide.
b) Montrer que $\omega(x)$ est connexe.
c) Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}^+$, $\phi_s(\omega(x)) \subset \omega(x)$.
Le but de l'exercice est de montrer une version simplifiée du théorème de Poincaré-Bendixson :

> Si $\omega(x)$ ne contient pas de point où $f$ s'annule, alors il existe une solution périodique $X$ de $(\star)$ telle que $\omega(x) = \{X(s), s \in \mathbb{R}\}$.

2. [Théorème de redressement du flot]
Soit $x_0 \in U$ un point tel que $f(x_0) \neq 0$. Soit $D$ une droite passant par $x_0$, de vecteur directeur $\vec{u}$, telle que $f(x_0)$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$.
Montrer qu'il existe $V \subset U$ un voisinage de $x_0$, $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ et $\psi : V \to ]-\epsilon_1; \epsilon_1[\times]-\epsilon_2; \epsilon_2[$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tels que :

1. $\psi(x_0) = (0, 0)$
2. $\psi^{-1}(]-\epsilon_1; \epsilon_1[\times\{0\}) \subset D$
3. Si $X$ est une solution maximale de l'équation $(\star)$ restreinte à $V$, alors $\psi(X)$ est une fonction de la forme $t \in ]t_0 - \epsilon_2; t_0 + \epsilon_2[ \to (a, t - t_0)$, pour certaines constantes $a \in ]-\epsilon_1; \epsilon_1[, t_0 \in \mathbb{R}$.

L'ensemble $I = \psi^{-1}(]-\epsilon_1; \epsilon_1[\times\{0\}) \subset V \cap D$ (qui est un intervalle ouvert de $D$) est appelé *section transverse.*

On admet que l'ensemble des points d'intersection entre une section transverse $I$ et l'image d'une solution maximale $X$ de $(\star)$, définie sur $\mathbb{R}$, est toujours de l'une des trois formes suivantes :
- l'ensemble vide
- un singleton

- un ensemble dénombrable (fini ou infini) ; dans ce cas, si on note $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ les réels tels que $X(t_k) \in I$, les points $X(t_k)$ sont disposés sur $I$ dans le même ordre que les réels $\{t_k\}$ sont ordonnés dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que le point $X(t_k)$ est « entre » les points $X(t_l)$ et $X(t_m)$ si et seulement si $t_k$ appartient à l'intervalle $]t_l; t_m[$ (ou $]t_m; t_l[$ si $t_m < t_l$).

[À l'aide du théorème de Jordan, la démonstration de ce résultat n'est pas très difficile mais tout de même assez technique.]

3. Montrer que si $I$ est une section transverse, $\omega(x)$ a au plus un point d'intersection avec $I$.

4. Soit $x$ comme dans la question 1. On suppose que $f$ ne s'annule pas sur $\omega(x)$.
Soit $y \in \omega(x)$ quelconque. Soit $X$ la solution de $(\star)$ pour la condition initiale $X(0) = y$.
a) Montrer que $X(\mathbb{R}^+) \subset \omega(x)$ et que $\omega(y) \subset \omega(x)$.
b) Montrer que $X$ est périodique.
[Indication : considérer un point $z \in \omega(y)$ et une section transverse passant par $z$.]

5. Montrer que $\{X(s), s \in \mathbb{R}\}$ est ouvert et fermé dans $\omega(x)$ puis conclure.