Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$1

Corrigé

Exercice 1

1. Pour $p=1$, $l^1 = \left\{ (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| < +\infty \right\}$ et $||u||_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$.

Montrons d'abord que l^1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- l^1 est stable par multiplication par un scalaire : si $\sum_k |u_k| < +\infty$, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\sum_k |\lambda u_k| = |\lambda| \left(\sum_k |u_k| \right) < +\infty$ donc $(u \in l^1) \Rightarrow (\lambda u \in l^1)$.
- l^1 est stable par addition : si $\sum_k |u_k| < +\infty$ et $\sum_k |v_k| < +\infty$, alors, par inégalité triangulaire :
$$\sum_k |u_k + v_k| \leq \sum_k |u_k| + \sum_k |v_k| < +\infty$$
donc $(u, v \in l^1) \Rightarrow ((u+v) \in l^1)$

Montrons maintenant que $||.||_1$ est une norme :

- Homogénéité : $||\lambda u||_1 = \sum_k |\lambda u_k| = \sum_k |\lambda||u_k| = |\lambda|\,||u||_1$
- Séparation : pour tout k, $0 \leq |u_k| \leq ||u||_1$ donc, si $||u||_1 = 0$, $|u_k| = 0\,\forall k$, ce qui implique $u_k = 0\,\forall k$.
- Inégalité triangulaire : $||u+v||_1 = \sum_k |u_k + v_k| \leq \sum_k (|u_k| + |v_k|) = ||u||_1 + ||v||_1$.

2. a) Puisque $a, b > 0$, il suffit de montrer que $\log(ab) \leq \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$.

La fonction log est concave. Puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, cela implique :
$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) &\geq \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q) \\ &= \log(a) + \log(b) = \log(ab)\end{aligned}$$

b) Quitte à multiplier u et v par des constantes positives non-nulles, on peut supposer que $||u||_p = ||v||_q = 1$. Alors :
$$\begin{aligned}\sum_k |u_k v_k| &\leq \sum_k \left(\frac{|u_k|^p}{p} + \frac{|v_k|^q}{q} \right) \\ &= \frac{||u||_p^p}{p} + \frac{||v||_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1 = ||u||_p ||v||_q\end{aligned}$$

c) On suppose d'abord que les suites u et v valent 0 à partir d'un certain rang (pour éviter les problèmes liés à la convergence des sommes).
Soit $q = \frac{p}{p-1}$. Puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\begin{aligned}
||u+v||_p^p &= \sum_k |u_k + v_k|^p \\
&\leq \sum_k (|u_k| + |v_k|)|u_k + v_k|^{p-1} \\
&= \sum_k |u_k||u_k + v_k|^{p-1} + \sum_k |v_k||u_k + v_k|^{p-1} \\
&\leq ||u||_p || \, |u+v|^{p-1}||_q + ||v||_p || \, |u+v|^{p-1}||_q
\end{aligned}$$

Or $||(u+v)^{p-1}||_q = \left(\sum_k |u_k + v_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \left(\sum_k |u_k + v_k|^p\right)^{(p-1)/p} = ||u+v||_p^{p-1}$. On a donc démontré $||u+v||_p^p \leq (||u||_p + ||v||_p)||u+v||_p^{p-1}$. Cela implique $||u+v||_p \leq ||u||_p + ||v||_p$.
L'inégalité triangulaire est donc vraie lorsque les suites u et v stationnent en 0.

Concluons. L'espace l^p est stable par multiplication par un scalaire (même justification qu'en 1.). Montrons qu'il est stable par addition.
Soient $u, v \in l^p$. Notons, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $u^{(N)}$ la suite telle que :

$$\begin{aligned}
u_k^{(N)} &= u_k \text{ si } k \leq N \\
&= 0 \text{ si } k > N
\end{aligned}$$

On définit $v^{(N)}$ de la même manière.
Pour tout N, $||u^{(N)} + v^{(N)}||_p \leq ||u^{(N)}||_p + ||v^{(N)}||_p$ (d'après ce que l'on vient de démontrer). Donc $||u^{(N)} + v^{(N)}||_p \leq ||u||_p + ||v||_p$. Si on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient $||u+v||_p < +\infty$ donc $u + v \in l^p$.
La fonction $||.||_p$ est homogène et vérifie la séparation (même justification qu'en 1.). On vient de démontrer l'inégalité triangulaire. C'est donc une norme.

Exercice 2

1. Commençons par vérifier que δ est bien définie. Il faut montrer que, pour tous $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, $\phi_{K_1} - \phi_{K_2}$ est une fonction bornée. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, les fonctions $y \in K_1 \to d(x,y)$ et $y \in K_2 \to d(x,y)$ sont continues et définies sur des compacts. Elles atteignent donc leur minimum : il existe $y_1 \in K_1$ et $y_2 \in K_2$ tels que $\phi_{K_1}(x) = d(x, y_1)$ et $\phi_{K_2}(x) = d(x, y_2)$. Alors $|\phi_{K_1}(x) - \phi_{K_2}(x)| = |d(x,y_1) - d(x,y_2)| \leq d(y_1, y_2) \leq \min\limits_{(z_1,z_2) \in K_1 \times K_2} d(z_1, z_2)$. Cette majoration étant valable pour tout x, $\phi_{K_1} - \phi_{K_2}$ est bornée.
Montrons que δ est une norme.

- Symétrie : $\delta(K_1, K_2) = ||\phi_{K_1} - \phi_{K_2}||_\infty = || - (\phi_{K_1} - \phi_{K_2})||_\infty = \delta(K_2, K_1)$
- Séparation : si $\delta(K_1, K_2) = 0$, alors $\phi_{K_1} = \phi_{K_2}$.
  En particulier, pour tout $x \in K_1$, $\inf\limits_{y \in K_2} d(x,y) = \phi_{K_2}(x) = \phi_{K_1}(x) = 0$.

Comme K_2 est compact et comme la fonction $y \in K_2 \to d(x,y)$ est continue, elle atteint sa borne inférieure. Il existe donc $y \in K_2$ tel que $d(x,y) = 0$. Pour ce y, on doit avoir $y = x$ donc $x \in K_2$.

On a ainsi démontré $K_1 \subset K_2$. De la même façon, $K_2 \subset K_1$ donc $K_1 = K_2$.

- Inégalité triangulaire : $\delta(K_1, K_3) = ||\phi_{K_1} - \phi_{K_3}||_\infty \leq ||\phi_{K_1} - \phi_{K_2}||_\infty + ||\phi_{K_2} - \phi_{K_3}||_\infty = \delta(K_1, K_2) + \delta(K_2, K_3)$

La fonction δ n'est plus une norme si on la définit sur l'ensemble des parties non-vides de $\mathbb{R}^n$. En fait, elle n'est même plus définie : par exemple, pour $K_1 = \{0\}$ et $K_2 = \mathbb{R}^n$, $\phi_{K_1} - \phi_{K_2}$ n'est pas bornée.

2. Sens direct : supposons $\delta(K_1, K_2) \leq \epsilon$.
Si $x \in K_1$, $\phi_{K_1}(x) = 0$. Puisque $||\phi_{K_1} - \phi_{K_2}||_\infty \leq \epsilon$, on doit avoir $\phi_{K_2}(x) \leq \epsilon$. Puisque K_2 est compact et que la fonction $y \in K_2 \to d(x,y)$ est continue, cette fonction atteint sa borne inférieure. Il existe donc $y \in K_2$ tel que $d(x,y) = \phi_{K_2}(x) \leq \epsilon$. Alors $x \in \overline{B(y,\epsilon)} \subset V_\epsilon(K_2)$. Donc $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$.
De même, $K_2 \subset V_\epsilon(K_1)$.

Sens indirect : supposons $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$ et $K_2 \subset V_\epsilon(K_1)$.
Il faut montrer que $||\phi_{K_1} - \phi_{K_2}||_\infty \leq \epsilon$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque.
De même que précédemment, il existe $y_1 \in K_1$ tel que $d(x, y_1) = \phi_{K_1}(x)$.
Puisque $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$, il existe $y_2 \in K_2$ tel que $y_1 \in \overline{B(y_2,\epsilon)}$. Alors $d(x,y_2) \leq d(x,y_1) + d(y_1,y_2) \leq d(x,y_1) + \epsilon$. Donc $\phi_{K_2}(x) \leq d(x,y_2) \leq d(x,y_1) + \epsilon = \phi_{K_1}(x) + \epsilon$.
De même, $\phi_{K_1}(x) \leq \phi_{K_2}(x) + \epsilon$. Donc $|\phi_{K_1}(x) - \phi_{K_2}(x)| \leq \epsilon$.

3. Soient $K \in \mathcal{K}$ et $\epsilon > 0$ quelconques. On va montrer qu'il existe $K_0 \in \mathcal{K}_0$ tel que $\delta(K, K_0) \leq \epsilon$.
Puisque K est compact, il existe $K_0 = \{x_s\}_{1 \leq s \leq S}$ une famille finie de points de K tels que $K \subset \bigcup_s \overline{B(x_s, \epsilon)}$.

Pour ce K_0, on a $K \subset V_\epsilon(K_0)$, par définition, et $K_0 \subset K \subset V_\epsilon(K)$. D'après la question précédente, cela implique $\delta(K, K_0) \leq \epsilon$.

Exercice 3

1. a) $\mathcal{C}$ contient X et $\emptyset$.

Si $U_1, ..., U_n \in \mathcal{C}$, alors :
- soit $U_i = \emptyset$ pour un certain i, et alors $\bigcap_i U_i = \emptyset \in \mathcal{C}$
- soit $X - U_i$ est fini pour tout i et alors $X - \left(\bigcap_i U_i\right) = \bigcup_i (X - U_i)$ est aussi fini donc $\bigcap_i U_i \in \mathcal{C}$

Si $\{U_i\}_{i \in I}$ est un ensemble d'éléments de $\mathcal{C}$, alors :
- soit $U_i = \emptyset$ pour tout i et alors $\bigcup_i U_i = \emptyset \in \mathcal{C}$
- soit $X - U_j$ est fini pour un certain j et alors $X - \left(\bigcup_i U_i\right) \subset X - U_j$ est fini et $\bigcup_i U_i \in \mathcal{C}$.

b) Deux ouverts non-vides U et V vérifient toujours $U \cap V \neq \emptyset$, puisque $X - (U \cap V)$ est fini et X est infini. Donc la topologie n'est pas séparée.

2. Soit $z \in X$ quelconque. Montrons que la suite converge vers z.

Soit U un ouvert contenant z. L'ensemble $X-U$ est fini. Notons $\alpha_1, ..., \alpha_s$ ses éléments. L'ensemble $\{n \text{ tq } x_n \notin U\} = \bigcup_{t\leq s} \{n \text{ tq } x_n = \alpha_t\}$ est fini. À partir d'un certain rang, la suite (x_n) est donc incluse dans U.

3. Soit f une fonction continue. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments tous distincts de X. Pour tout $z \in X$, $x_n \to z$ donc $f(x_n) \to f(z)$. Puisque, dans un espace séparé, la limite est unique, tous les $f(z)$ sont égaux : la fonction f est constante. Réciproquement, les fonctions constantes sont continues.

Exercice 4

1. Supposons d'abord que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour la topologie produit vers une limite f_∞ et montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f_∞.
Soient $x_0 \in [0;1]$ et $\epsilon > 0$ quelconques. Pour tout $x \in [0;1]$, on note $I_x = [0;1]$ si $x \neq x_0$ et $I_{x_0} = [0;1] \cap]f_\infty(x_0) - \epsilon; f_\infty(x_0) + \epsilon[$. Notons $U = \prod_{x\in[0;1]} I_x$.
L'ensemble U est un ouvert de la topologie produit et il contient f_∞. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f_∞ pour la topologie produit, $f_n \in U$ pour tout n assez grand. Cela implique que $f_n(x_0) \in I_{x_0}$ à partir d'un certain rang, ce qui est la même chose que de dire qu'on a $|f_n(x_0) - f_\infty(x_0)| < \epsilon$ pour tout n assez grand.
Puisque ceci est vrai pour x_0 et ϵ quelconques, f_n converge simplement vers f_∞.

Réciproquement, supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f_∞ et montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers f_∞ au sens de la topologie produit.
Il faut montrer que, pour tout ouvert élémentaire U contenant f_∞, on a $f_n \in U$ pour tout n assez grand.
Soit donc $U = \prod_{x\in[0;1]} I_x$ un ouvert élémentaire contenant f_∞. Par définition de la topologie produit, $I_x = [0;1]$ pour tout x sauf un nombre au plus fini. Notons $x_1, ..., x_s$ les x pour lesquels $I_x \neq [0;1]$.
Puisque $f_\infty \in U$, on a $f_\infty(x_k) \in I_{x_k}$ pour tout $k \leq s$. De plus, puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f_∞ et puisque les I_{x_k} sont des voisinages ouverts des $f_\infty(x_k)$, on doit avoir pour tout n assez grand :

$$f_n(x_k) \in I_{x_k} \quad \forall k \leq s$$

Donc, pour tout n assez grand, $f_n(x) \in I_x$ pour tout $x \in [0;1]$, c'est-à-dire que $f_n \in U$.

2. a) C'est le théorème de convergence dominée (la fonction 1 dominant tous les éléments de F).
b) Nous allons montrer qu'il n'existe pas de voisinage U de la fonction nulle tel que, pour toute $f \in U$, $I(f) < 1$.
Soit en effet U un voisinage de 0. Quitte à considérer un sous-ensemble de U, on peut supposer que U est un ouvert élémentaire : $U = \prod_{x\in[0;1]} I_x$ avec $I_x = [0;1]$ pour tout x sauf un nombre fini.
On note $x_1, ..., x_s$ les x pour lesquels $I_x \neq [0;1]$.
Pour tout k, on a $0 \in I_{x_k}$ puisqu'on a supposé $0 \in U$.
Notons f_0 la fonction telle que $f_0(x) = 1$ pour tout x sauf si $x \in \{x_1, ..., x_s\}$, auquel cas $f_0(x) = 0$.

Alors $f_0 \in U$ mais $I(f_0) = 1$.
3. Si E était métrisable, F le serait aussi. Dans un espace métrisable (plus généralement dans un espace à base dénombrable de voisinages), une fonction est continue si et seulement si elle est séquentiellement continue. D'après les deux questions précédentes, la fonction I considérée ici est séquentiellement continue mais pas continue ; F n'est donc pas métrisable et E non plus.

Exercice 5

1. Soit $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire que, pour tout n, $(u_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels). Soit $u^\infty \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors $u^{(n)} \to u^\infty$ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
(1) Pour tout k, $u_k^{(n)} \to u_k^\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
(2) Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que les suites $(u_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires en u_k^∞ à partir au moins du rang M, pour tous les k sauf un nombre au plus fini.

Sens direct : si $u^{(n)} \to u^\infty$.
Montrons d'abord (1). Soit k quelconque. Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $\{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tq } v_k \in]u_k^\infty - \epsilon; u_k^\infty + \epsilon[\}$ est ouvert dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et contient u^∞. À partir d'un certain rang, $u^{(n)}$ appartient donc à cet ensemble, ce qui revient à dire que $|u_k^{(n)} - u_k^\infty| < \epsilon$.
Montrons maintenant (2). Si ce n'est pas le cas, il existe, pour tout M, un nombre infini d'indices k tel que la suite $(u_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire à partir du rang M. Pour tout M, on fixe k_M un tel indice (en prenant les k_M distincts deux à deux) et $n_M \geq M$ tel que $u_{k_M}^{(n_M)} \neq u_{k_M}^\infty$. Soit également, pour tout M, V_M un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $u_{k_M}^\infty$ mais pas $u_{k_M}^{(n_M)}$.
Notons $E = \{v \text{ tq } v_{k_M} \in V_M, \forall M \in \mathbb{N}\}$. C'est un voisinage ouvert de u^∞ mais, pour tout M, $u^{(n_M)} \notin E$. La suite $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'appartient donc pas à E à partir d'un certain rang, ce qui est en contradiction avec le fait qu'elle converge vers u^∞.

Sens indirect : supposons maintenant (1) et (2) vérifiées et montrons la convergence.
Soit $W = \prod_k V_k$ un ouvert contenant u^∞ (on peut se restreindre aux ouverts de cette forme puisqu'ils constituent une base de la topologie). Nous allons montrer que $u^{(n)} \in W$ pour tout n assez grand.
Soit $M \in \mathbb{N}$ tel que toutes les suites $(u_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ stationnent en u_k^∞ à partir du rang M pour tout k sauf un nombre au plus fini. Notons $k_1, ..., k_s$ les indices pour lesquels les suites ne stationnent pas.
Pour tout n assez grand, $u_{k_i}^{(n)} \in V_{k_i}$ pour tout $i \leq s$ (d'après (1)). De plus, pour tout $n \geq M$, $u_k^{(n)} = u_k^\infty \in V_k$ si k n'est pas l'un des k_i. Donc, pour tout n assez grand, $u^{(n)} \in W$.
2. a) Soit $\prod_k U_k$ un voisinage de 0. Nous allons montrer qu'il est d'intersection non-vide avec E.
Soit n tel que $1/n \in U_0$. Il existe car $0 \in U_0$.
Soit $x \neq 0$ tel que $x \in U_n$.
Pour ces choix, $\frac{1}{n}\delta^0 + x\delta^n$ appartient au voisinage. Puisque c'est vrai pour tout voisinage, $0 \in \overline{E}$.
Pour la deuxième partie de la question, soit, par l'absurde, $\left(\frac{1}{n_k}\delta^0 + x_k\delta^{(n_k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers 0. D'après la propriété (1) décrite à la question 1., $\frac{1}{n_k} \to 0$.

D'après la propriété (2), il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous les indices $i > 0$ sauf un nombre au plus fini, $(x_k \delta_i^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire en 0 à partir du rang M. Or, pour tout $i = n_k$ avec $n_k \geq M$, ce n'est pas le cas car $x_k \delta_{n_k}^{(n_k)} = x_k \neq 0$. C'est absurde.
b) Dans une topologie métrisable, l'adhérence d'un ensemble est l'ensemble des limites des suites à éléments dans l'ensemble. D'après la question précédente, la topologie que l'on considère ici ne vérifie pas cette propriété ; elle n'est donc pas métrisable.

Exercice 6

1. La première égalité est vraie. Démontrons-la.
Pour la topologie produit, un produit de fermés est un fermé. Donc $\prod_{i\in I} \overline{E_i}$ est un fermé contenant $\prod_{i\in I} E_i$. Par définition de l'adhérence, on a donc :

$$\overline{\prod_{i\in I} E_i} \subset \prod_{i\in I} \overline{E_i}$$

Pour conclure, il suffit de montrer l'inclusion dans l'autre sens. Il faut donc montrer que, si $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \overline{E_i}$, alors $(x_i)_{i\in I} \in \overline{\prod_{i\in I} E_i}$.
Soit $(x_i)_{i\in I}$ un tel point. Il faut montrer que tous les voisinages de $(x_i)_{i\in I}$ sont d'intersection non-vide avec $\prod_{i\in I} E_i$. Par définition de la topologie produit, il suffit de le montrer pour les voisinages qui sont des ouverts élémentaires de la topologie.
Soit $\prod_i V_i$ un ouvert élémentaire de la topologie produit contenant $(x_i)_{i\in I}$. Pour tout $i \in I$, $x_i \in V_i$ donc V_i est un voisinage de x_i. Comme $x_i \in \overline{E_i}$, $V_i \cap E_i \neq \emptyset$.
Donc :

$$\left(\prod_{i\in I} E_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} V_i\right) = \left(\prod_{i\in I} (V_i \cap E_i)\right) \neq \emptyset$$

Cela conclut la démonstration.
La deuxième égalité n'est pas nécessairement vraie. En effet, si, par exemple, chaque $\mathring{E}_i$ est non-vide mais différent de X_i tout entier, l'ensemble $\prod_{i\in I} \mathring{E}_i$ n'est pas ouvert : s'il était ouvert, il contiendrait un ouvert élémentaire de la forme $\prod_{i\in I} V_i$ avec les V_i égaux à X_i pour tout i sauf un nombre au plus fini. On aurait alors, pour tout i sauf un nombre au plus fini, $V_i \subset \mathring{E}_i \subset X_i$ et $V_i = X_i$ donc $\mathring{E}_i = X_i$. Ce serait en contradiction avec l'hypothèse.
L'intérieur d'un ensemble est nécessairement un ouvert donc, puisque $\prod_{i\in I} \mathring{E}_i$ n'est pas toujours ouvert, l'égalité ne peut pas toujours être vraie.
2. Cette topologie est nécessairement la topologie discrète. Démontrons-le.
On veut montrer que, pour tout $x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{T}$. Cela impliquera que, pour tout $E \subset X$, puisque $E = \bigcup_{x\in X} \{x\}$, E appartient à $\mathcal{T}$ (puisqu'une union d'ouverts est un ouvert).
Soit $x \in X$ quelconque.

Soit n le plus petit entier tel qu'il existe un ouvert $U \in \mathcal{T}$ contenant x et de cardinal n. Cet entier est bien défini car il existe au moins un ouvert fini contenant x : X.
Nous allons montrer que $n = 1$. Le seul ensemble de cardinal 1 contenant x étant $\{x\}$, cela impliquera $\{x\} \in \mathcal{T}$.
Supposons par l'absurde que $n \geq 2$. Soit $U \in \mathcal{T}$ de cardinal n contenant x. Soit $y \in U - \{x\}$.
Puisque la topologie est séparée, il existe $V \in \mathcal{T}$ un ouvert tel que $x \in V$ mais $y \notin V$.
L'ensemble $U \cap V$ est l'intersection de deux ouverts donc aussi un ouvert. Il contient x (car U et V contiennent x) mais pas y. Il est donc inclus dans U mais pas égal à U. Son cardinal est donc strictement inférieur à n, ce qui est en contradiction avec la définition de n.

3. C'est possible. Si $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$, c'est clair. Supposons donc que X et Y sont non-vides et fixons $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. On pose :

$$\begin{aligned} D(z,z') &= d(z,z') \quad \text{si } z,z' \in X \\ &= \delta(z,z') \quad \text{si } z,z' \in Y \\ &= d(z,x_0) + \delta(y_0,z') + 1 \quad \text{si } z \in X, z' \in Y \\ &= d(z',x_0) + \delta(y_0,z) + 1 \quad \text{si } z \in Y, z' \in X \end{aligned}$$

Restreinte à $X \times X$, cette fonction vaut d et, restreinte à $Y \times Y$, elle vaut δ.
Montrons que D est une distance.
La fonction D est symétrique. Elle est également séparante (car d et δ le sont).
Montrons l'inégalité triangulaire : $D(z,z'') \leq D(z,z') + D(z',z'')$?
Il faudrait normalement différencier huit cas, selon l'appartenance de z, z', z'' aux ensembles X ou Y. Les cas $z, z', z'' \in X$ ou $z, z', z'' \in Y$ découlent du fait que d et δ vérifient l'inégalité triangulaire.
On va traiter deux autres cas. Les quatre cas restants se démontrent de la même façon que l'un de ces deux-là.

- $z, z' \in X, z'' \in Y$:

$$\begin{aligned} D(z,z'') &= d(z,x_0) + \delta(y_0,z'') + 1 \\ &\leq d(z,z') + d(z',x_0) + \delta(y_0,z'') + 1 \\ &= D(z,z') + D(z',z'') \end{aligned}$$

- $z, z'' \in X, z' \in Y$:

$$\begin{aligned} D(z,z'') &= d(z,z'') \\ &\leq d(z,x_0) + d(x_0,z'') \\ &\leq d(z,x_0) + \delta(y_0,z') + 1 + d(x_0,z'') + \delta(y_0,z') + 1 \\ &= D(z,z') + D(z',z'') \end{aligned}$$

4. Soit $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble de parties disjointes de $\mathbb{N}$, dont l'union est $\mathbb{N}$, chacune de ces parties étant infinie. (Un tel ensemble existe forcément : soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ une bijection quelconque. Si on pose $E_n = \phi^{-1}(\{n\} \times \mathbb{N})$, l'ensemble $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convient.)

On considère la topologie $\mathcal{T}$ telle que $U \subset \mathbb{N}$ est ouvert si et seulement si $U = \emptyset$ ou, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n - (U \cap E_n)$ est fini. On peut vérifier qu'il s'agit bien d'une topologie.
Montrons qu'elle n'est pas à base dénombrable d'ouverts. Soit, par l'absurde, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts, qu'on peut supposer non-vides.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, fixons $x_n \in U_n \cap E_n$. Un tel x_n existe puisque $E_n - U_n$ est fini et E_n est infini donc $E_n \cap U_n \neq \emptyset$.
Notons $V = \mathbb{N} - \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. C'est un ouvert car, pour tout n, $E_n - V = \{x_n\}$ est fini. En revanche, il ne contient aucun U_n puisque, pour tout n, $x_n \in U_n$ mais $x_n \notin V$. C'est en contradiction avec la définition d'une base d'ouverts.

Exercice 7

1. a) Soit $x \in X$ fixé. Il faut montrer que f_x est bornée. On va montrer que, pour tout A, $|f_x(A)| \leq d(x,a)$. En effet :

$$\begin{aligned} f_x(A) &= d(x,A) - d(a,A) \\ &= \inf_{\alpha\in A} d(x,\alpha) - d(a,A) \\ &\leq \inf_{\alpha\in A} (d(x,a) + d(a,\alpha)) - d(a,A) \\ &= d(x,a) + d(a,A) - d(a,A) = d(x,a) \end{aligned}$$

De même, $-f_x(A) \leq d(x,a)$.
b) On note $||.||_\infty$ la norme uniforme.
Soient $x, y \in X$. Montrons que $||f_x - f_y||_\infty = d(x,y)$.
Pour tout $A \in \mathcal{F}$, $(f_x - f_y)(A) = d(x,A) - d(y,A)$. La même démonstration qu'à la question a) montre que $||f_x - f_y||_\infty \leq d(x,y)$.
De plus, $|(f_x - f_y)(\{y\})| = |d(x,\{y\}) - d(y,\{y\})| = |d(x,y) - 0| = d(x,y)$. On a donc aussi $||f_x - f_y||_\infty \geq d(x,y)$.
c) $\{f_x\}_{x\in X}$ n'est pas nécessairement un fermé de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$. On va donc choisir pour V un sous-espace vectoriel strict de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$, dans lequel $\{f_x\}_{x\in X}$ sera fermé.
Posons $V = \mathrm{Vect}\,\{f_x\}_{x\in X}$ (c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires finies de f_x). Notons $F = \{f_x\}_{x\in X}$. D'après la question b), $x \in X \to f_x \in F$ est une isométrie. Pour conclure, il suffit de démontrer que F est un fermé de V.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X telle que $(f_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans V vers une limite g. Nous allons montrer que $g \in F$. Puisque g appartient à V, il existe $y_1, ..., y_s$ des éléments distincts de $X - \{a\}$ et $t_1, ..., t_s$ des réels tels que $g = \sum\limits_{k=1}^{s} t_k f_{y_k}$.
Si la suite $(f_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang, g est égale à cette constante donc appartient à F. On peut donc supposer que $(f_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire. Quitte à extraire, on peut alors supposer que $x_n \neq a$ pour tout n.
Prenons $A = \{y_k\}_{1\leq k\leq s} \cup \{a\}$. Puisque $f_{x_n} \to g$, $(g - f_{x_n})(A) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour tout $k \leq s$, $f_{y_k}(A) = 0$ donc :

$$(g - f_{x_n})(A) = -f_{x_n}(A) = -d(x_n, A)$$

Comme A est fini et $d(x_n, A) \to 0$ quand $n \to +\infty$, il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers un élément de A, qu'on note b. Quitte à extraire, on peut supposer que c'est toute la suite (x_n) qui converge vers b.
Alors $f_{x_n} \to f_b$, puisque $||f_{x_n} - f_b||_\infty = d(x_n, b) \to 0$. Donc, puisque la limite est uniquement définie, $g = f_b$ et $g \in F$.

2. Soit X un ensemble avec quatre éléments : $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. On munit X de la distance d suivante :

$$\begin{array}{lll} d(x_1,x_2)=1 & d(x_1,x_3)=1 & d(x_1,x_4)=1 \\ d(x_2,x_3)=1 & d(x_2,x_4)=1 & d(x_3,x_4)=2 \end{array}$$

Supposons par l'absurde qu'il existe une isométrie ϕ de X vers un espace préhilbertien $(V, \langle ., . \rangle)$. On note $||.||$ la norme engendrée par le produit scalaire.
On doit avoir $2 = ||\phi(x_4) - \phi(x_3)|| = ||\phi(x_4) - \phi(x_1)|| + ||\phi(x_1) - \phi(x_3)|| = 1 + 1$.
Par le cas d'égalité de Cauchy-Schwartz, cel implique $\phi(x_4) - \phi(x_1) = \phi(x_1) - \phi(x_3)$ donc $\phi(x_1) = \frac{\phi(x_4)+\phi(x_3)}{2}$.
Or le même raisonnement est également valable avec x_2 à la place de x_1. On doit donc avoir $\phi(x_1) = \phi(x_2)$, ce qui est impossible car $||\phi(x_1) - \phi(x_2)|| = d(x_1, x_2) = 1 \neq 0$.