École Normale Supérieure
2 octobre 2014

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$2

Exercice 1 : questions diverses

1. Soient A et B deux parties d'un espace topologique X. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en général. Lorsqu'elles décrivent une égalité fausse, indiquez si au moins l'une des inclusions est vraie.
a) $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ c) $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$
2. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $F \subset X$ un fermé non-vide. Pour tout $x \in X$, on note $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$. Montrer que $x \to d(x, F)$ est une application continue et que $d(x, F) = 0$ si et seulement si $x \in F$.
3. Soient X et Y deux espaces topologiques. Montrer qu'une fonction $f : X \to Y$ est continue si et seulement si, pour tout ensemble $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 2 : topologie « de la limite supérieure » sur $\mathbb{R}$.

On munit $\mathbb{R}$ de la topologie $\mathcal{T}_{\limsup}$ engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ et $]b, +\infty[$.
1. Montrer que les intervalles $]a, b]$ (avec $a < b$) forment une base d'ouverts de cette topologie.
2. Cette topologie est-elle moins fine que la topologie usuelle ? Plus fine ?
3. Déterminer l'adhérence de $]a, b]$.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour cette topologie.
5. Montrer que cette topologie n'est pas métrisable.
[Indication : Montrer qu'il n'existe pas de base dénombrable d'ouverts et utiliser 4.]

Exercice 3 : espaces normaux et lemme d'Urysohn

On dit qu'un espace topologique X est normal s'il vérifie la propriété suivante :

> Quels que soient $F_0, F_1 \subset X$ des fermés disjoints, il existe $U_0, U_1 \subset X$ des ouverts disjoints tels que $F_0 \subset U_0$ et $F_1 \subset U_1$.

Nous allons montrer que cette propriété est équivalente au lemme d'Urysohn :

> Quels que soient $F_0, F_1 \subset X$ des fermés disjoints, il existe une fonction continue $f : X \to [0; 1]$ qui vaut 0 sur F_0 et 1 sur F_1.

1. Montrer que, si X vérifie le lemme d'Urysohn, alors X est normal.
2. Dans cette question, on suppose que X est normal et on démontre qu'il vérifie le lemme d'Urysohn.
Soient F_0, F_1 des fermés disjoints.
a) On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des réels dyadiques de $[0; 1]$ (c'est-à-dire l'ensemble des réels de la forme $k2^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}, k \in \{0, ..., 2^n\}$).
Montrer qu'il existe une famille de fermés $(G_x)_{x \in \mathcal{D}}$ telle que :

(1) $G_0 = F_0$ et $G_1 \subset X - F_1$

(2) Si $r, s \in \mathcal{D}$ avec $r < s$, alors $G_r \subset \mathring{G}_s$.

b) On pose :

$$f(x) = \inf\{r \in \mathcal{D} \text{ tq } x \in G_r\} \qquad \text{si } x \in G_1$$
$$= 1 \qquad \text{sinon}$$

Montrer que f est continue et à images dans $[0;1]$, que f vaut 0 sur F_0 et 1 sur F_1.

3. Montrer que tout espace métrique est normal.

Exercice 4 : théorème de métrisabilité de Nagata-Smirnov

On dit qu'un espace topologique X est *régulier* s'il est séparé et vérifie la propriété suivante : pour tout $B \subset X$ fermé et tout $x \in X - B$, il existe U, V deux ouverts disjoints tels que $B \subset U$ et $x \in V$.

On dit qu'un ensemble $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ de parties de X est *localement fini* si tout point $x \in X$ admet un voisinage V pour lequel $\{U \in \mathcal{U} \text{ tq } U \cap V \neq \emptyset\}$ est fini.

Le théorème de Nagata-Smirnov dit qu'un espace topologique X est métrisable si et seulement si il vérifie les deux propriétés suivantes :

(1) X est régulier

(2) Il existe une base d'ouverts de X qui est une union dénombrable de sous-ensembles localement finis de $\mathcal{P}(X)$.

Dans cet exercice, on montre que le sens direct de ce théorème : si X vérifie (1) et (2), alors X est métrisable.

On note $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des sous-ensembles localement finis de $\mathcal{P}(X)$ dont l'union forme une base d'ouverts de X.

1. a) Montrer que pour tout n et tout $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_n$:

$$\overline{\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V} = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} \overline{V}$$

b) Soit $A \subset X$ un ouvert. Pour tout n, on note $U_n = \bigcup_{U\in\mathcal{U}_n, \overline{U}\subset A} U$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{U}_n \subset A \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = A$$

2. a) Soient $F_1, F_2 \subset X$ deux fermés disjoints. On note $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des familles dénombrables d'ouverts de X telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{U}_n \subset X - F_1 \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X - F_1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{V}_n \subset X - F_2 \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n = X - F_2$$

Elles existent, d'après la question précédente.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U'_n = U_n - \bigcup_{k=1}^{n} \overline{V}_k$ et $V'_n = V_n - \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_k$.
On pose $U' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n$ et $V' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V'_n$. Montrer que U' et V' sont des ouverts disjoints tels que $F_2 \subset U$ et $F_1 \subset V$.
b) En déduire que X est normal.
3. Montrer que, pour tout $U \subset X$ ouvert, il existe $f : X \to [0;1]$ continue telle que :

$$\forall x \in U, \quad f(x) > 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \forall x \in X - U, \quad f(x) = 0$$

[Indication : Utiliser le résultat de l'exercice précédent et des ouverts vérifiant la propriété de la question 1.b) pour $A = U$.]
4. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $U \in \mathcal{U}_n$, on note $f_{n,U}$ une fonction définie comme dans la question précédente et on pose $g_{n,U} = f_{n,U}/n$ (de sorte de $g_{n,U}$ est à images dans $[0;1/n]$).
Pour tous $x, y \in X$, on pose :

$$d(x,y) = \sup_{n,U} |g_{n,U}(x) - g_{n,U}(y)|$$

Montrer que d est une distance, qui engendre la topologie de X.

Exercice 5 : sur la séparation

1. On dit qu'un espace topologique X est :
(0) *de Kolmogorov* (ou T_0) si, pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe un voisinage V de l'un des deux points qui ne contient pas l'autre point.
(1) *accessible* (ou T_1) si, pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe un voisinage V de x tel que $y \notin V$.
(2) *séparé* (ou T_2) si, pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe V_x un voisinage de x et V_y un voisinage de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.
Les implications (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (0) sont vraies. Montrer que les réciproques sont fausses.
2. [Une propriété universelle]
On va montrer le théorème suivant : soit X un espace topologique. Il existe Y un espace séparé et $\pi : X \to Y$ continue telle que, pour tout espace topologique séparé et toute fonction $f : X \to Z$ continue, il existe une unique $g : Y \to Z$ continue vérifiant $f = g \circ \pi$.
a) Pour tous $x, y \in X$, on note $x\mathcal{R}y$ si, pour toute fonction $f : X \to Z$ continue à valeurs dans un espace topologique séparé Z, $f(x) = f(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
b) On pose $Y = X/\mathcal{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de X pour la relation $\mathcal{R}$. On note $\pi : X \to Y$ l'application qui à un élément x associe sa classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$. On dit que $U \subset Y$ est un ouvert de Y si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X.
Montrer que cela définit bien une topologie sur Y.
c) Montrer que Y est séparé pour cette topologie.
d) Démontrer le théorème.
e) Montrer que si (Y, π) et (Y', π') sont deux espaces séparés vérifiant la propriété du théorème, alors ils sont isomorphes comme espaces topologiques.

Exercice 6 : théorème de Cantor-Bendixson

Soit A une partie d'un espace topologique X. On dit qu'un point $x \in X$ est un *point de condensation* de A si, pour tout voisinage V de x, l'intersection $V \cap A$ est non-dénombrable. On note A^* l'ensemble des points de condensation de A.

1. Si X admet une base dénombrable d'ouverts, montrer que $A - (A^* \cap A)$ est dénombrable. En déduire que $A^* = A^{**}$.

2. En déduire le théorème de Cantor-Bendixson : tout espace topologique à base dénombrable d'ouverts s'écrit comme la réunion disjointe de deux sous-ensembles X_1 et X_2, où X_1 est fermé sans point isolé et X_2 est dénombrable.