

Feuille d'exercices n^{o}2
Corrigé

Exercice 1

1. a) L'ensemble $\widehat{A \cup B}^{\circ}$ est le plus grand ouvert inclus dans $A \cup B$. Comme $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ est ouvert et inclus dans $A \cup B$, on a :

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$$

En revanche, on n'a pas nécessairement égalité. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, si on prend $A = [0;1]$ et $B = [1;2]$:

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} =]0;2[$$
$$\text{mais } \mathring{A} \cup \mathring{B} =]0;2[- \{1\}$$

b) L'ensemble $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cup B$. Puisque $\overline{A} \cup \overline{B}$ est fermé et contient $A \cup B$, on a :

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$$

De plus, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Comme $\overline{A \cup B}$ est un fermé contenant A, $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. De même, $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, ce qui implique :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

c) D'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\partial(A \cup B) &= \overline{A \cup B} - \left(\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}\right) \\
&= \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) - \left(\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}\right) \\
&\subset \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) - \left(\mathring{A} \cup \mathring{B}\right) \\
&= \left(\overline{A} - \left(\mathring{A} \cup \mathring{B}\right)\right) \cup \left(\overline{B} - \left(\mathring{A} \cup \mathring{B}\right)\right) \\
&\subset \left(\overline{A} - \mathring{A}\right) \cup \left(\overline{B} - \mathring{B}\right) \\
&= \partial A \cup \partial B
\end{aligned}$$

En revanche, l'autre inclusion n'est pas vraie. Le contre-exemple du a) est encore valable ici : si $A = [0;1]$ et $B = [1;2]$,

$$\partial(A \cup B) = \{0\} \cup \{2\}$$
$$\text{mais } \partial A \cup \partial B = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\}$$

2. Pour montrer la continuité, on va montrer que $x \to d(x, F)$ est 1-lipschitzienne. Cela impliquera qu'elle est continue.
Pour tous x, x', $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y) \leq \inf_{y \in F} d(x, x') + d(x', y) = d(x, x') + d(x', F)$.
Donc $d(x, F) - d(x', F) \leq d(x, x')$ et, symétriquement, $d(x', F) - d(x, F) \leq d(x, x')$. On a donc :

$$|d(x', F) - d(x, F)| \leq d(x, x')$$

c'est-à-dire que $x \to d(x, F)$ est 1-lipschitzienne.
Si $x \in F$, $d(x, F) = 0$. Réciproquement, si $d(x, F) = 0$, il existe une suite x_n de points de F telle que $d(x, x_n) \to 0$, c'est-à-dire telle que $x_n \to x$. Puisque F est fermé, $x \in F$.
3. Supposons d'abord que f est continue. Soit $A \subset X$ quelconque. L'ensemble $\overline{f(A)}$ est fermé donc $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ est aussi fermé, puisque f est continue. Puisque cet ensemble contient A, il contient $\overline{A}$:

$$\overline{A} \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

Supposons maintenant que, pour tout $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ et montrons que f est continue.
Il faut montrer que, pour tout $F \subset X$ fermé, $f^{-1}(F)$ est aussi un fermé. Soit donc F un fermé quelconque.
Posons $A = f^{-1}(F)$. Puisque $f(A) \subset F$, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{F} = F$ donc $\overline{f^{-1}(F)} = \overline{A} \subset f^{-1}(F)$. Puisque, de plus, $f^{-1}(F) \subset \overline{f^{-1}(F)}$, l'égalité $f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)}$ est vraie et $f^{-1}(F)$ est un fermé.

Exercice 2

1. L'ensemble $E = \{]a; b] \text{ tq } a < b\}$ est stable par intersection finie et l'union des éléments de E est égale à $\mathbb{R}$. L'ensemble E est donc une base de la topologie qu'il engendre.
Cette topologie qu'il engendre est moins fine que $\mathcal{T}_{\lim\sup}$ car tous les $]a; b]$ sont des ouverts pour $\mathcal{T}_{\lim\sup}$: ils s'écrivent comme l'intersection de deux ouverts, $]-\infty, b]$ et $]a; +\infty[$.
Cette topologie est aussi plus fine que $\mathcal{T}_{\lim\sup}$ car, pour tous a et b, $]-\infty; a]$ et $]b; +\infty[$ s'écrivent comme une union d'ensembles de la forme $]a'; b']$. Ils appartiennent donc à la topologie engendrée par E, et la topologie qu'ils engendrent est incluse dans celle engendrée par E.
La topologie engendrée par E, dont E est une base, est donc égale à $\mathcal{T}_{\lim\sup}$.
2. Les boules ouvertes pour la topologie usuelle sont des ouverts de $\mathcal{T}_{\lim\sup}$:

$$]x - \epsilon; x + \epsilon[= \bigcup_{y \in]x-\epsilon; x+\epsilon[}]x - \epsilon; y]$$

Les ouverts de la topologie usuelle appartiennent donc à $\mathcal{T}_{\lim\sup}$; $\mathcal{T}_{\lim\sup}$ est plus fine que la topologie usuelle. En revanche, elle n'est pas moins fine : les $]a; b]$ sont ouverts pour $\mathcal{T}_{\lim\sup}$ mais pas pour la topologie usuelle.
3. Le complémentaire de $]a; b]$ vaut $\mathbb{R} -]a; b] =]-\infty; a] \cup]b; +\infty[$. C'est donc un ouvert. Donc $]a; b]$ est un fermé ; il est sa propre adhérence.
4. Tout ouvert non-vide de $\mathcal{T}_{\lim\sup}$ contient un invervalle non-vide de la forme $]a; b]$, qui contient nécessairement un élément de $\mathbb{Q}$, car $\mathbb{Q}$ est dense pour la topologie usuelle.

5. Montrons d'abord que $\mathcal{T}_{\limsup}$ n'est pas à base dénombrable d'ouverts. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle est à base dénombrable d'ouverts. Soit $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts. Notons $E = \{\sup U_n \text{ tq } n \in \mathbb{N}\}$ (où sup désigne la borne supérieure standard sur $\mathbb{R}$). L'ensemble E est dénombrable.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $]-\infty; a]$ est un ouvert de $\mathcal{T}_{\limsup}$ donc une union d'éléments de la base $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n \subset]-\infty; a]$ et $a \in U_n$. Pour un tel n, $a = \sup U_n$. Donc $a \in E$.
On a ainsi démontré $\mathbb{R} \subset E$, ce qui est impossible car E est dénombrable. Donc $\mathcal{T}_{\limsup}$ n'est pas à base dénombrable d'ouverts.
Supposons maintenant par l'absurde que $\mathcal{T}_{\limsup}$ est métrisable. Soit d une distance sur $\mathbb{R}$ engendrant $\mathcal{T}_{\limsup}$. Alors $\mathcal{B} = \{B_d(x, 1/n) \text{ tq } x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base dénombrable d'ouverts pour $\mathcal{T}_{\limsup}$.
En effet, il est clair qu'il s'agit d'un ensemble dénombrable d'ouverts. Montrons que c'est une base de $\mathcal{T}_{\limsup}$.
Soit $U \in \mathcal{T}_{\limsup}$ un ouvert quelconque. Soit $z \in U$. Puisque U est ouvert pour la distance d, il existe $n_z \in \mathbb{N}^*$ tel que $B_d(z, 1/n_z) \subset U$. D'après la question précédente, il existe $x_z \in \mathbb{Q} \cap B_d(z, 1/2n_z)$. Alors $z \in B_d(x_z, 1/2n_z)$ et $B_d(x_z, 1/2n_z) \subset B_d(z, 1/n_z) \subset U$.
Les ouverts $B_d(x_z, 1/2n_z)$ appartiennent à $\mathcal{B}$ et $U = \bigcup_{z\in U} B_d(x_z, 1/2n_z)$.
Donc $\mathcal{B}$ est une base dénombrable d'ouverts.

Exercice 3

1. Soient F_0, F_1 des fermés disjoints. Puisque X vérifie le lemme d'Urysohn, il existe une fonction continue $f : X \to [0; 1]$ telle que $f(x) = 0$ si $x \in F_0$ et $f(x) = 1$ si $x \in F_1$.
Si on pose $U_0 = f^{-1}([0; 1/2[)$ et $U_1 = f^{-1}(]1/2; 1])$, U_0 et U_1 sont bien disjoints. Ce sont des ouverts car f est continue. Ils contiennent respectivement F_0 et F_1.
Donc X est normal.

2. a) On va construire par récurrence sur n les familles $(G_{k2^{-n}})_{k=0,\dots,2^n}$, de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :
- $G_0 = F_0$ et $G_1 \subset X - F_1$
- Si $k < l$, alors $G_{k2^{-n}} \subset \mathring{G}_{l2^{-n}}$

Pour $n = 0$, on prend $G_0 = F_0$. On fixe U_0 et U_1 deux ouverts disjoints contenant respectivement F_0 et F_1 (ils existent puisque X est normal). On prend $G_1 = X - U_1$. On a alors $G_1 \subset X - F_1$ et $\overset{\circ}{\widehat{X - U_1}} \supset \mathring{U}_0 = U_0 \supset F_0 = G_0$.
On suppose maintenant que la construction a été réalisée jusqu'à n et on la réalise pour $n + 1$. Soit $r = k2^{-(n+1)}$ avec $k = 0, \dots, 2^{n+1}$.
Si k est pair, G_r est déjà construit.
Si k est impair, construisons G_r. Les ensembles $G_{(k-1)2^{-(n+1)}}$ et $X - \mathring{G}_{(k+1)2^{-(n+1)}}$ sont des fermés et ils sont disjoints (d'après la deuxième propriété vérifiée par la famille des G_i). Puisque X est normal, il existe donc U_0, U_1 des ouverts disjoints tels que :

$$G_{(k-1)2^{-(n+1)}} \subset U_0 \qquad \text{et} \qquad X - \mathring{G}_{(k+1)2^{-(n+1)}} \subset U_1$$

On prend $G_{k2^{-(n+1)}} = X - U_1$. C'est bien un fermé.

On a :

$$G_{(k-1)2^{-(n+1)}} \subset U_0 = \mathring{U}_0 \subset \overset{\circ}{\widehat{X - U_1}} = \mathring{G}_{k2^{-(n+1)}}$$

et :

$$G_{k2^{-(n+1)}} = X - U_1 \subset \mathring{G}_{(k+1)2^{-(n+1)}}$$

Donc les propriétés voulues sont bien vérifiées.
b) Vue sa définition, f est à images dans $[0;1]$. Pour tout $x \in F_0$, on a $x \in G_0$ donc $f(x) = 0$.
Pour tout $x \in F_1$, $x \notin G_1$ donc $f(x) = 1$.
Il reste à montrer la continuité.
Soient $x \in X$ et $\epsilon > 0$ quelconque. Montrons qu'il existe un voisinage V de x tel que, pour tout $y \in V$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Si $x \notin G_1$, alors $V = X - G_1$ est un voisinage de x sur lequel f vaut $1 = f(x)$. Ce voisinage convient.
Supposons maintenant que $x \in G_1$ et notons $r = f(x)$.
Soient r_1, r_2 des réels dyadiques tels que $r - \epsilon < r_1 < r < r_2 < r + \epsilon$. Posons $V = \mathring{G}_{r_2} - G_{r_1}$.
Par convention si $r_1 < 0$, on pose $G_{r_1} = \emptyset$ et, si $r_2 > 1$, on pose $G_{r_2} = X$. C'est un ouvert (car c'est la différence d'un ouvert et d'un fermé) et il contient x.
En effet, $x \notin G_{r_1}$, sinon on aurait $f(x) \le r_1 < r$. De plus, il existe un réel dyadique $r' \in [r; r_2[$ tel que $x \in G_{r'}$ (sinon on aurait $f(x) \ge r_2 > r$) donc on a $x \in G_{r'} \subset \mathring{G}_{r_2}$.
Pour tout $y \in V$, $y \in G_{r_2}$ donc $f(y) \le r_2$. De plus, $y \notin G_{r_1}$ donc $y \notin G_s$ pour tout $s < r_1$.
Donc $f(y) \ge r_1$.
Donc, pour tout $y \in V$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

3. Supposons que la topologie de X est engendrée par une distance d. On va montrer que X vérifie le lemme d'Urysohn.
Soient F_0, F_1 des fermés disjoints. On peut supposer qu'ils sont tous les deux non-vides (sinon une fonction constante convient).
On pose :

$$f(x) = \frac{d(x, F_0)}{d(x, F_0) + d(x, F_1)}$$

D'après la question 2. de l'exercice 1, cette fonction est bien définie (son dénominateur ne s'annule pas, car $F_0 \cap F_1 = \emptyset$) et continue. Elle vaut 0 sur F_0 et 1 sur F_1.

Exercice 4

1. a) Pour tout $V_0 \in \mathcal{V}$, $\overline{V}_0 \subset \overline{\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V}$ car $\overline{\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V}$ est un fermé contenant V_0 (et, par définition, $\overline{V}_0$ est le plus petit ensemble fermé vérifiant cette propriété). On a donc :

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} \overline{V} \subset \overline{\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V}$$

Montrons la réciproque. Soit $x \notin \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \overline{V}$. Puisque $\mathcal{V}$ est localement fini (car $\mathcal{U}_n$ l'est), il existe un voisinage W de x tel que $\{V \in \mathcal{V} \text{ tq } W \cap V \neq \emptyset\}$ est fini.
Notons $V_1, ..., V_s$ les éléments de $\mathcal{V}$ intersectant W. Pour tout $t \le s$, puisque $x \notin \overline{V}_t$, il existe W_t un voisinage de x tel que $W_t \cap V_t = \emptyset$.

Posons $Y = W \cap W_1 \cap ... \cap W_s$. Alors Y est un voisinage de x. Pour tout $V \in \mathcal{V}$, soit $V = V_t$ pour un certain t et alors $V \cap Y \subset V_t \cap W_t = \emptyset$, soit V n'est pas l'un des V_t et alors $V \cap Y \subset V \cap W = \emptyset$. Donc Y est un voisinage de x tel que $Y \cap \left(\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \right) = \emptyset$. Donc $x \notin \overline{\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V}$.

b) Pour tout n, d'après la question précédente :

$$\overline{U}_n = \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{U}_n, \overline{U} \subset A} U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n, \overline{U} \subset A} \overline{U} \subset A$$

À cause de cet inclusion, on doit avoir :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U}_n \subset A$$

Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in A$ quelconque. Puisque X est régulier et puisque $X - A$ est un fermé qui ne contient pas x, il existe B_1, B_2 des ouverts disjoints de X tels que $x \in B_1$ et $X - A \subset B_2$.

Puisque $\bigcup_n \mathcal{U}_n$ est une base d'ouverts de X, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $U \in \mathcal{U}_n$ tels que $x \in U \subset B_1$.

On a alors $\overline{U} \subset \overline{B}_1 \subset \overline{X - B_2} = X - B_2 \subset A$. Donc $x \in U_n$ pour un certain n, ce qui implique que $x \in \bigcup_n U_n$.

2. a) Pour tout n, U'_n et V'_n sont des ouverts, puisque U_n et V_n sont ouverts et $\bigcup_{k \leq n} \overline{V}_k$ et $\bigcup_{k \leq n} \overline{U}_k$ sont fermés. Donc U' et V' sont des unions d'ouverts ; ce sont aussi des ouverts.

Montrons qu'ils sont disjoints. Soit $x \in X$ quelconque ; montrons qu'on ne peut pas avoir $x \in U' \cap V'$.

Si $x \notin U_n$ et $x \notin V_n$ pour tout n, on a $x \notin U'$ et $x \notin V'$.

Supposons donc qu'il existe n_0 tel que $x \in U_{n_0}$ ou $x \in V_{n_0}$ et choisissons un tel n_0 le plus petit possible. Par symétrie, on peut supposer qu'on a au moins $x \in U_{n_0}$. Pour tout $n < n_0$, $x \notin V'_n$ car $x \notin V_n$. Pour tout $n \geq n_0$, $x \in \overline{U}_{n_0}$ donc $x \notin V'_n$. Donc $x \notin V'$. On ne peut donc pas avoir $x \in U' \cap V'$.

Montrons que $F_2 \subset U$. De même, on aura $F_1 \subset V$.

Pour tout n, $\overline{V}_n \subset X - F_2$ donc, pour tout n, $F_2 \cap U'_n = F_2 \cap U_n$. On a donc :

$$F_2 \cap U' = \bigcup_n (F_2 \cap U'_n) = \bigcup_n (F_2 \cap U_n) = F_2 \cap \left(\bigcup_n U_n \right) = F_2 \cap (X - F_1) = F_2$$

Donc $F_2 \subset U'$.

b) La propriété démontrée à la question précédente est exactement la définition de la normalité.

3. On applique la question 1.b) à l'ouvert U. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{U}_n \subset U \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = U$$

Pour tout n, les ensembles $\overline{U}_n$ et $X - U$ sont des fermés disjoints. Puisque X est normal, il existe, d'après l'exercice précédent, une fonction continue $f_n : X \to [0; 1]$ telle que f_n vaut 0 sur $X - U$ et 1 sur $\overline{U}_n$.

On pose $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^{-(n+1)} f_n$.
Cette fonction est à images dans $[0;1]$. Elle est continue car c'est une limite uniforme de fonctions continues. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X - U$, $f_n(x) = 0$ donc, pour tout $x \in X - U$, $f(x) = 0$.
En revanche, si $x \in U$, il existe n tel que $x \in U_n$ (puisque l'union des U_n vaut U). Il existe donc n tel que $f_n(x) = 1$, ce qui implique $f(x) > 0$.

4. La fonction d est une distance :
   - $d(x,y) = d(y,x)$
   - L'inégalité triangulaire est vérifiée.
   - d est séparante : $d(x,x) = 0$. En revanche, si $x \neq y$, il existe un ouvert $W \subset X$ qui contient x mais pas y (car X est séparé). Puisque $\bigcup\limits_n \mathcal{U}_n$ est une base d'ouverts, il existe $n \in \mathbb{N}, U \in \mathcal{U}_n$ tels que $x \in U \subset W$. Pour ces valeurs de n et U, on a $g_{n,U}(y) = 0$ et $g_{n,U}(x) > 0$. Donc $d(x,y) > 0$.

Montrons que d engendre la topologie de X.

On va d'abord montrer que les boules ouvertes pour la distance d sont des ouverts pour la topologie de X.
Soient $x \in X$ et $\epsilon > 0$ quelconques. On va montrer que $B_d(x,\epsilon) = \{y \in X \text{ tq } d(x,y) < \epsilon\}$ est un ouvert de X.
Soit $x' \in B_d(x,\epsilon)$ quelconque. Soit $m > 0$ tel que $d(x,x') + 1/m < \epsilon$.
Pour tout $n \leq m$, soit V_n un voisinage de x' tel que $\{U \in \mathcal{U}_n \text{ tq } U \cap V_n \neq \emptyset\}$ est fini. Notons $U_1, ..., U_s$ les $U \in \mathcal{U}_n$ tels que $U \cap V_n \neq \emptyset$. Commes les fonctions $g_{n,U_1}, ..., g_{n,U_s}$ sont continues, il existe un voisinage W_n de x' tel que, pour tout $i \leq s$ et tout $y \in W_n$:

$$|g_{n,U_i}(x') - g_{n,U_i}(y)| < 1/m \tag{1}$$

On note $\Omega = V_1 \cap ... \cap V_{m-1} \cap W_1 \cap ... \cap W_{m-1}$. C'est un voisinage de x' dans X.
Montrons que, pour tout $y \in \Omega$, $d(x',y) \leq 1/m$.
En effet, pour tous n, U, si $n \geq m$, alors $|g_{n,U}(x') - g_{n,U}(y')| \leq 1/m$, puisque $g_{n,U}$ est à images dans $[0;1/n] \subset [0;1/m]$. Si $n < m$, alors $y \in V_n \cap W_n$. Dans ce cas, soit U est l'un des $U_i \in \mathcal{U}_n$ qui intersectent V_n, mais dans ce cas $|g_{n,U}(x') - g_{n,U}(y)| < 1/m$ d'après l'équation (1), soit U n'est pas l'un des U_i mais alors, comme x' et y appartiennent à V_n, $x' \notin U$ et $y \notin U$ donc $g_{n,U}(x') = g_{n,U}(y) = 0$.
Dans tous les cas :

$$|g_{n,U}(x') - g_{n,U}(y')| \leq 1/m$$

On a donc $d(x',y) \leq 1/m$ et on a montré que $\Omega \subset \overline{B}_d(x',1/m)$.
D'après la définition de m, $\overline{B}_d(x',1/m) \subset B_d(x,\epsilon)$ donc $x' \in \Omega \subset B_d(x,\epsilon)$.
Donc les boules ouvertes pour la distance d sont des voisinages de chacun de leurs points dans X. Ce sont donc des ouverts de X et tous les ensembles qui sont ouverts pour la distance d sont aussi des ouverts de X.

Montrons maintenant que les ouverts de X sont ouverts pour la distance d.
Soient $V \subset X$ un ouvert et $x \in V$. Puisque $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ est une base d'ouverts de X, il existe $n \in \mathbb{N}, U \in \mathcal{U}_n$ tels que $x \in U \subset V$.

Alors $x \in B_d(x, g_{n,U}(x)) \subset V$. En effet, si $d(x,y) < g_{n,U}(x)$, on doit avoir $|g_{n,U}(x) - g_{n,U}(y)| < g_{n,U}(x)$ donc $g_{n,U}(y) \neq 0$. Par définition de $g_{n,U}$, cela implique que $y \in U \subset V$.
De même que précédemment, cela montre que V est un voisinage de chacun de ses points au sens de la distance d. C'est donc un ouvert pour la distance d.

Exercice 5

1. Soit $X = \{0,1\}$, muni de la topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$. Cette topologie vérifie T_0 : deux points distincts x et y sont nécessairement $x = 0, y = 1$ ou $x = 1, y = 0$ et $\{0\}$ est un voisinage de x qui ne contient pas y. En revanche, cette topologie n'est pas T_1 car 1 n'admet pas de voisinage ne contenant pas 0.
La topologie des parties de complémentaire fini sur un espace infini X ne vérifie pas T_2 (voir le TD précédent) mais vérifie T_1 : si $x, y \in X$ sont distincts, $X - \{y\}$ est un voisinage de x ne contenant pas y.

2. a) La relation $\mathcal{R}$ est réflexive : pour toute fonction définie sur X, $f(x) = f(x)$.
La relation $\mathcal{R}$ est symétrique : $(f(x) = f(y)) \Rightarrow (f(y) = f(x))$.
La relation $\mathcal{R}$ est transitive : $(f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)) \Rightarrow (f(x) = f(z))$.
b) On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des ouverts ainsi définis.
On a bien $\emptyset, Y \in \mathcal{T}$ car $\emptyset$ et X sont des ouverts de X.
Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, alors $\pi^{-1}(U_1 \cap U_2) = \pi^{-1}(U_1) \cap \pi^{-1}(U_2)$. Puisque $\pi^{-1}(U_1)$ et $\pi^{-1}(U_2)$ sont des ouverts de X, $\pi^{-1}(U_1 \cap U_2)$ aussi donc $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.
Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\pi^{-1}\left(\bigcup_i U_i\right) = \bigcup_i \pi^{-1}(U_i)$. Cet ensemble est une union d'ouverts de X donc c'est un ouvert de X. Donc $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$.
c) Soient $[x]$ et $[y]$ deux classes d'équivalence distinctes pour la relation $\mathcal{R}$. Nous allons montrer que ces points admettent des voisinages ouverts distincts.
Par définition de la relation d'équivalence, il existe $f : X \to Z$ une fonction continue à valeurs dans un espace topologique séparé telle que $f(x) \neq f(y)$.
Puisque Z est séparé, il existe $V_x, V_y \subset Z$ des ouverts tels que $f(x) \in V_x$, $f(y) \in V_y$ et $V_x \cap V_y = \emptyset$.
Comme f est continue, $f^{-1}(V_x)$ et $f^{-1}(V_y)$ sont des ouverts de X. Ils sont disjoints et contiennent respectivement x et y. Notons-les $U_x = f^{-1}(V_x)$ et $U_y = f^{-1}(V_y)$.
L'ouvert U_x est saturé pour $\mathcal{R}$: si $a \in U_x, b \in X$ et $a\mathcal{R}b$, alors $b \in U_x$ (puisqu'alors $f(a) = f(b)$, par définition de $\mathcal{R}$, donc $b \in f^{-1}(V_x)$ ssi $a \in f^{-1}(V_x)$).
De même, U_y est saturé pour $\mathcal{R}$. Les ensembles $\pi(U_x)$ et $\pi(U_y)$ sont donc des ouverts de Y (car $\pi^{-1}(\pi(U_x)) = U_x$ est ouvert et de même pour U_y). Ils sont disjoints (car leurs antécédants par π le sont) et $[x] \in \pi(U_x), [y] \in \pi(U_y)$.
d) La fonction π est continue (c'est immédiat à cause de la façon dont on a défini la topologie sur Y) et on a vu que Y était séparé.
Soit Z un espace séparé et $f : X \to Z$ continue. Pour toute classe d'équivalence $[x] \in Y$, on pose $g([x]) = f(x)$. Cette définition est correcte puisque, si $x\mathcal{R}x'$, $f(x) = f(x')$.
Par construction, $f = g \circ \pi$.
De plus, la fonction g est continue : si $\mathcal{U}$ est un ouvert de Z, $g^{-1}(\mathcal{U}) = \pi(f^{-1}(\mathcal{U}))$. L'ensemble $f^{-1}(\mathcal{U})$ est saturé pour $\mathcal{R}$ (pour la même raison qu'à la question précédente) donc $\pi(f^{-1}(\mathcal{U}))$ est ouvert dans Y.

La fonction g est unique car, pour tout x, on doit avoir $g \circ \pi(x) = f(x)$. Il est donc nécessaire que $g([x]) = f(x)$.
e) Puisque π' est une application de X vers Y', qui est séparé, il existe une unique $g : Y \to Y'$ continue telle que $\pi' = g \circ \pi$.
De même, il existe une unique $g' : Y' \to Y$ telle que $\pi = g' \circ \pi'$.
Montrons que $g : Y \to Y'$ est un isomorphisme, de réciproque g'. Il faut montrer que $g' \circ g = \mathrm{Id}_Y$ et $g \circ g' = \mathrm{Id}_{Y'}$.
D'après les égalités qui précèdent, $\pi = g' \circ \pi' = (g' \circ g) \circ \pi$.
Or $\pi : X \to Y$ est une application continue à valeurs dans un espace séparé. Il existe donc une unique application $h : Y \to Y$ continue telle que $\pi = h \circ \pi$. Comme l'identité est une telle application, h doit nécessairement être l'identité. Or $g' \circ g$ est une telle application. Donc $g' \circ g = \mathrm{Id}_Y$.
De même, $g \circ g' = \mathrm{Id}_{Y'}$.

Exercice 6

1. Soit $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts de X. Notons :

$$\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N} \text{ tq } U_n \cap A \text{ est dénombrable}\}$$

L'ensemble $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathcal{N}} U_n\right) \cap A$ est dénombrable (car c'est l'union dénombrable des $U_n \cap A$ pour $n \in \mathcal{N}$, qui sont dénombrables).
De plus, $A - (A^* \cap A) \subset \left(\bigcup\limits_{n\in\mathcal{N}} U_n\right) \cap A$. En effet, si $x \in A - (A^* \cap A)$, il existe, par définition de A^*, un voisinage V de x tel que $V \cap A$ est dénombrable. Puisque $\{U_n\}$ est une base d'ouverts, il existe n tel que $x \in U_n \subset V$. Pour cette valeur de n, $U_n \cap A$ est dénombrable. Donc $n \in \mathcal{N}$ et $x \in \left(\bigcup\limits_{n\in\mathcal{N}} U_n\right)$.
(En réalité, les ensembles $A - (A^* \cap A)$ et $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathcal{N}} U_n\right) \cap A$ sont égaux.)
L'ensemble $A - (A^* \cap A)$ est donc inclus dans un ensemble dénombrable. Il est dénombrable.
Montrons d'abord que $A^* \subset A^{**}$. Soit $x \in A^*$.
Soit $V \subset X$ un voisinage quelconque de x. Il faut montrer que $A^* \cap V$ est indénombrable.
Puisque $x \in A^*$, $A \cap V$ est indénombrable. De plus, $A^* \cap V \supset (A \cap A^*) \cap V = (A \cap V) - (A - A^*)$.
Comme $A - A^*$ est dénombrable mais $A \cap V$ est indénombrable, $(A \cap V) - (A - A^*)$ est indénombrable et $A^* \cap V$ aussi.
Montrons maintenant que $X - A^* \subset X - A^{**}$.
Soit $x \in X - A^*$. Il existe V un voisinage ouvert de x tel que $A \cap V$ est dénombrable. Pour tout $y \in V$, V est un voisinage ouvert de y donc, puisque $A \cap V$ est dénombrable, $y \notin A^*$.
Donc $A^* \cap V = \emptyset$; en particulier, cet ensemble est dénombrable. Donc $x \notin A^{**}$.

2. Soit A un espace topologique à base dénombrable.
Prenons $X_1 = A^*$ et $X_2 = A - A^*$. L'ensemble A est bien la réunion disjointe de X_1 et X_2.
L'ensemble X_2 est dénombrable, d'après la question précédente.

L'ensemble X_1 n'a pas de point isolé : si x était un point isolé, x n'appartiendrait pas à $X_1^* = A^{**} = A^* = X_1$.
L'ensemble X_1 est fermé : si $x \in A - X_1 = X_2 = A - A^*$, alors il existe un voisinage ouvert V de x dans A tel que $V \cap A = V$ est dénombrable. Aucun élément de V n'appartient à A^* (puisqu'ils ont justement un voisinage dénombrable : V). Donc $A - X_1$ est ouvert. Donc X_1 est fermé.